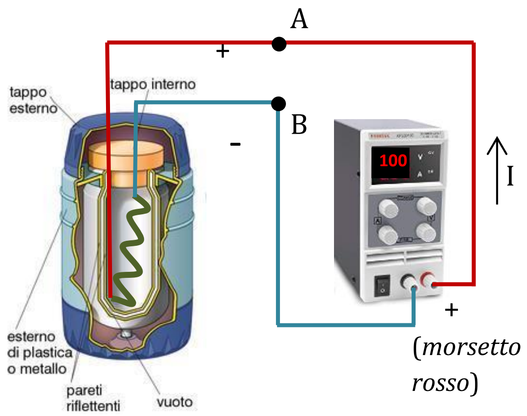
Capitolo 4 – Potenza elettrica, Energia elettrica

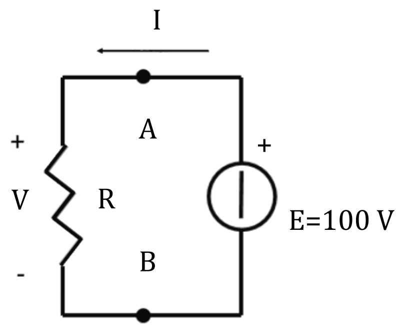
Mediante un semplice esercizio introduciamo qui di seguito i concetti di potenza elettrica e di energaia elettrica. In seguito, vediamo il fenomeno dell'effetto Joule.

4.1 Potenza elettrica assorbita da un bipolo

Problema 4.1: *Un contenitore, a coibentazione termica ideale, (thermos) ha il volume di 2.5 litri ed è pieno d'acqua alla temperatura iniziale di 20 °C.*
È inserita un resistore (si dice anche "una resistenza") costituito da un sottile filo di manganina di lunghezza l=10 m e dalla sezione S=0.45 mm². I capi del filo sono collegati ad un alimentatore di tensione continua, assimilabile ad un generatore di tensione ideale con forza elettromotrice pari a E=100 V.

- *Qual è la corrente I che percorre il circuito?*
- *Qual è la potenza elettrica P assorbita e dissipata per effetto Joule nella resistenza di manganina?*
- *Dopo quanto tempo Δt l'acqua sarà a 80 °C?*





La figura illustra a sinistra l'aspetto realistico del sistema descritto nel Problema 4.1. A destra la sua rappresentazione circuitale. L'alimentatore è rappresentato con un generatore ideale di tensione, come suggerisce il testo, con fem E pari a 100V. Il circuito in manganina avvolto entro il contenitore è rappresentato con un resistore di resistenza R da calcolare. I collegamenti li possiamo assumere privi di resistenza apprezzabile.

La resistenza R è quella di un conduttore filiforme e la possiamo calcolare con la formula seguente (vedi Capitolo 3), per la quale possiamo ignorare la variazione della resistività con la temperatura essendo il relativo coefficiente di temperatura molto piccolo per la manganina e comunque piccolo anche il salto di temperatura. Con la resistività in tabella a 20 °C allora risulta

$$R = \rho \frac{l}{S} = 0.4[\Omega \mathrm{mm}^2/m] \frac{10[m]}{0.45[mm^2]} = 8.89 \ \Omega$$

La tensione V fra i morsetti del resistore è imposta dal generatore ideale di tensione ed è quindi pari alla forza elettromotrice E dello stesso. Per la legge di Ohm allora la corrente è:

$$\mathrm{I} = \frac{V}{R} = \frac{E}{R} = \frac{100}{8.89} = \ 11.25 \ \ A$$

Il passo successivo del problema richiama il concetto di *potenza elettrica* di un bipolo, cioè di un componente con due morsetti: nel nostro caso il resistore di manganina. La sua espressione la possiamo ricavare con il seguente ragionamento. La tensione V fra A e B in figura è data come noto dal rapporto fra il lavoro ΔL compiuto dal campo elettrico presente nello spazio ove è immerso il circuito (dovuto alle cariche elettriche positive presenti sul filo superiore (quello del morsetto A, attaccato al polo positivo del generatore) e alle cariche negative (di valore uguale e contrario) presenti sul filo inferiore) su una carica Δq che va da A a B lungo un <u>percorso qualsiasi</u> e la carica Δq stessa:

$$V = \frac{\Delta L}{\Delta q}$$

ove il riferimento ai nodi A e B è sottinteso e l'indicazione al percorso è ignorato perché ininfluente. Possiamo allora calcolare il lavoro elettrico con la

$$\Delta\mathrm{L} = \mathrm{V}\,\Delta q$$

In effetti ci sono delle cariche elettriche cha vanno da A a B: sono quelle che costituiscono la corrente I. Se prendiamo un intervallino Δt sappiamo che vale

$$\mathrm{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad ovvero \quad \Delta q \ = \ \mathrm{I}\,\Delta t$$

dove Δq è la carica cercata, assunta positiva, che va da A a B lungo il filo di manganina[1]. Allora il lavoro elettrico compiuto dal campo elettrico e assorbito da bipolo che è attraversato dalla corrente vale:

$$\Delta\mathrm{L} = \mathrm{V}\,\Delta q \ = \ \mathrm{V}\,\mathrm{I}\,\Delta t$$

Siccome la potenza (in W, watt) è il rapporto fra il lavoro compiuto (in J, joule) e il tempo (in s, secondi) nel quale viene compiuto otteniamo

$$P_{[W]} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \ = \ V_{[V]}\,I_{[A]}$$

In definitiva possiamo dire che:

- Per calcolare la **<u>potenza assorbita</u>** da un bipolo dobbiamo moltiplicare i valori della tensione e della corrente, valutati con riferimento a versi positivi coordinati secondo la <u>convenzione degli utilizzatori</u> (o dei carichi): il verso positivo della corrente attraversa il bipolo entrando dal morsetto che è assunto positivo per la tensione e uscendo da quello assunto negativo.
- Con tali versi positivi la tensione e/o la corrente (che sono grandezze scalari con segno) possono risultare a volte negative.

[1] In realtà sappiamo che la corrente elettrica in un metallo come la manganina è dovuta al movimento di elettroni che sono cariche negate, ma in direzione contraria al verso positivo della corrente quindi da B ad A. Il risultato è perfettamente equivalente e possiamo sempre immaginare che la corrente sia dovuta al movimento di cariche positive nel verso positivo della corrente.

- La potenza assorbita (che è una grandezza scalare con segno) può risultare pertanto sia positiva che negativa.
- Tutto quanto affermato deve valere istante per istante anche se le grandezze non fossero costanti nel tempo. Si parla allora di potenza istantanea p(t) (per le grandezze variabili nel tempo si usano lettere minuscole) per la quale vale la

$$p_{assorbita}(t)_{[W]} = v(t)_{[V]}\ i(t)_{[A]} \quad convenzione\ degi\ utilizzatori$$

Tornando al nostro problema allora possiamo valutare la potenza elettrica assorbita dal resistore di manganina che sarà

$$P_{[W]} = V_{[V]}\, I_{[A]} = 100 \cdot 11.25 = 1125\, W$$

4.2 Effetto Joule

Il problema cita anche il concetto di "*potenza dissipata per effetto Joule*". Ciò si riferisce al fatto che quando una corrente elettrica percorre un mezzo conduttore (per esempio il nostro filo di manganina) il movimento delle cariche elettriche è frenato dal un attrito viscoso già citato introducendo il concetto di conducibilità elettrica (Modulo 2). Tale attrito viscoso dissipa la potenza assorbita da bipolo resistivo e la converte in potenza termica aumentando la temperatura del conduttore e dell'ambiente circostante (per esempio l'acqua del nostro thermos). Questo è l'**effetto Joule**.

Va precisato che non sempre la potenza assorbita da un bipolo sostiene un effetto Joule, ma ciò vale solo per i bipoli resistivi, cioè per i resistori, che sono dissipativi. Per esempio, nel caso di un motore, la potenza assorbita viene convertita, per la maggior parte, in potenza meccanica fornita all'albero rotante e solo in piccola parte dissipata sugli avvolgimento del motore che di conseguenza si riscaldano.

Per un resistore di resistenza R, la potenza assorbita e dissipata per effetto Joule la possiamo esprimere anche in funzione della resistenza. Possiamo infatti scrivere, con qualsiasi andamento di tensione e corrente nel tempo (cioè variabili o costanti):

$$p = vi = (Ri)\, i = Ri^2$$

ed anche

$$p = vi = v\,(\frac{v}{R}) = \frac{v^2}{R}$$

4.3 Potenza elettrica erogata da un bipolo

Possiamo chiederci da dove provenga la potenza elettrica appena calcolata e che viene assorbita dal resistore. Appare ovvio rispondere che essa è erogata, in ugual misura, dal generatore ideale (che rappresenta l'alimentatore) e quindi pari alla fem E (che è la tensione imposta dal generatore fra i suoi morsetti) per la corrente I valuta con verso uscente dal morsetto positivo del generatore.

In definitiva possiamo dire che:

- Per calcolare la **potenza erogata** da un bipolo dobbiamo moltiplicare i valori della sua tensione e corrente, valutati con riferimento a versi positivi coordinati secondo la convenzione dei generatori: il verso positivo della corrente attraversa il bipolo entrando dal morsetto che è assunto negativo per la tensione e uscendo da quello assunto positivo.
- Con tali versi positivi la tensione e/o la corrente (che sono grandezze scalari con segno) possono risultare a volte negative.
- La potenza erogata (che è una grandezza scalare con segno) può risultare pertanto sia positiva che negativa.
- La potenza erogata da un bipolo (quella calcolata con la convenzione di segno dei generatori) è uguale e contraria alla sua potenza assorbita (quella calcolata con la convenzione dei carichi).
- Tutto quanto affermato deve valere istante per istante anche se le grandezze non fossero costanti nel tempo. Si parla allora di potenza erogata istantanea p(t) (per le grandezze variabili nel tempo si usano lettere minuscole) per la quale vale la

$$p_{erogata}(t)_{[W]} = v(t)_{[V]} \; i(t)_{[A]} \quad \textit{convenzione dei generatori}$$

4.4 Energia elettrica assorbita (erogata) da un bipolo

Possiamo ora concludere il problema, affrontando la questione termica. Iniziamo col calcolare l'energia che serve per innalzare la temperatura di un litro d'acqua da 20° C a 80°C, che porremo poi pari al lavoro elettrico assorbito dal resistore e che, per effetto Joule è convertito in calore. Trascuriamo l'energia che serve per innalzare la temperatura del resistore stesso e delle pareti del contenitore e, ovviamente, anche quella dispersa essendo il contenitore perfettamente isolato (processo termico adiabatico).

E' noto che per aumentare la temperatura di un chilogrammo di acqua (un litro) serve una chilocaloria ovvero 4184 joule (cioè watt * secondo). Si dice quindi che la capacità termica dell'acqua (liquida) è pari a

$$c_{\mathrm{H2O}} = 1\,\frac{kcal}{kg\,°C} = 4184\,\frac{J}{kg\,°C} \quad ovvero\;\frac{Ws}{kg\,°C}$$

Con un salto termico $\Delta T = 80\text{-}20 = 60°C$ e una quantità *m* di acqua di 2.5 chilogrammi otteniamo

$$\Delta L_{[J]} = c_{H2O\,[J/kg/°C]}\; m_{[kg]}\; \Delta T_{[°C]} = 4184*2.5*60 = 627.6\;10^3\;J = 627.6\;10^3\;Ws$$

Con la potenza P calcolata, tale quantità di lavoro elettrico (di energia) richiederà il tempo

$$\Delta t_{\;[s]} = \frac{\Delta L_{[J]}}{P_{[W]}} = \frac{627.6\;10^3}{1125} = 558\;s$$

cioè quasi 10 min.

Problema 4.2 (autovalutazione): *Riprendere il Problema 3.1 (Capitolo 3).*

a) Calcolare la potenza erogata dalla pila
b) Calcolare l'energia erogata dalla pila in 8 minuti di funzionamento nelle condizioni del problema.

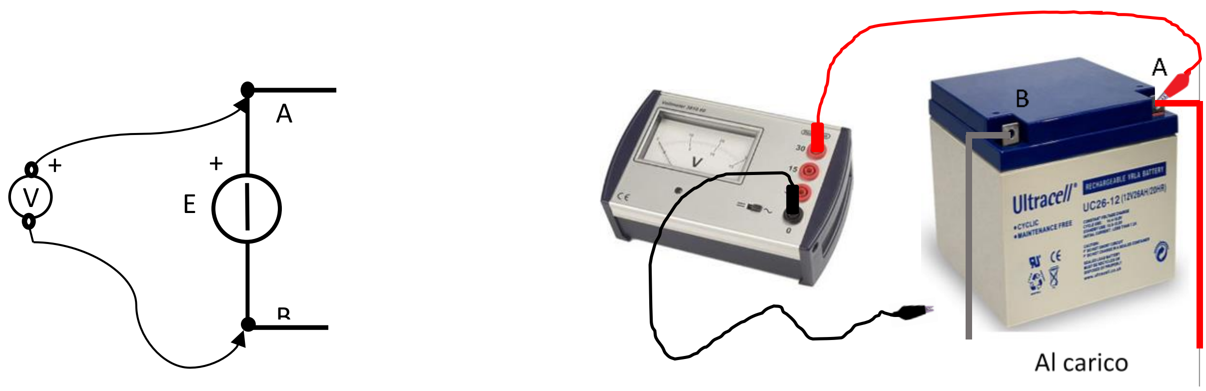
4.5 Misura della tensione, della corrente e della potenza

Le grandezze elettriche fin qui definite, cioè tensione, corrente, potenza possono essere misurate da strumenti detti rispettivamente: *voltmetri, amperometri, wattmetri*.

Gli strumenti *reali* (quelli che si impiegano nella pratica) approssimano col loro funzionamento più o meno accuratamente i corrispondenti strumenti *ideali*, che misurano tensione, corrente, potenza esattamente secondo le loro definizioni, senza errori e senza ritardi e senza disturbare (perturbare) in alcun modo il circuito nel quale sono inseriti.

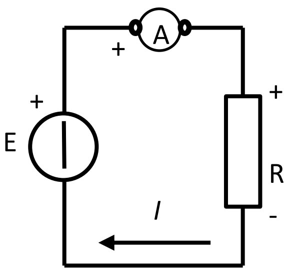
Gli strumenti reali possono essere di forma e aspetto anche molto diversi e basarsi su tecnologie di misura differenti (elettromeccaniche, elettroniche ecc). Alcune saranno esemplificate in qualcuno dei moduli successivi. La visualizzazione della grandezza misurata può essere *analogica* (solitamente mediante un indice su una scala graduata) o *digitale* (mediante un display numerico).

Il ***voltmetro ideale*** è uno strumento dotato di un *corpo* con due morsetti distinti con un segno + e con un segno – (a volte c'è il solo segno + su un morsetto essendo necessariamente il segno – sull'altro morsetto) e da due *cordoni*, ciascuno collegato ad uno dei due morsetti e terminanti con due *puntali*. La figura seguente illustra a sinistra un voltmetro ideale inserito per misurare la fem di un generatore di tensione. Il voltmetro ideale misura la tensione integrando il campo elettrico (definizione di tensione) lungo a linea rappresentata dai cordoni, andando dal pontale positivo A al puntale negativo B e quindi attraversando lo strumento dal morsetto positivo a quello negativo. Lo strumento ideale non perturba il circuito, cioè è "come se non ci fosse": dobbiamo concludere che il voltmetro ideale non è percorso da corrente quale che sia la tensione misurata, ovvero esso corrisponde ad un resistore di resistenza $R_V = \infty$.



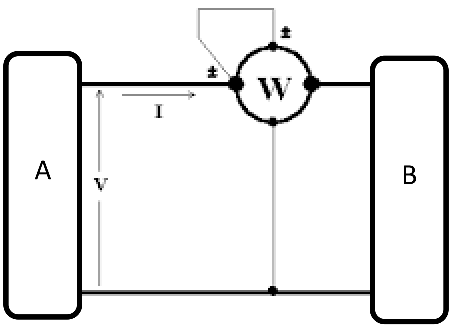
A destra vediamo la corrispondente situazione pratica. Un voltmetro (reale) analogico, i cui morsetti positivi sono distinti col colore rosso (sono tre per poter cambiare il fondo scala dello strumento (la portata), cioè la massima tensione misurabile) come il cordone ad essi collegato. Quello negativo è nero (come il cordone) ed è predisposto per misurare la tensione ai morsetti di una batteria. Il puntale positivo è collegato al morsetto positivo della batteria (è il morsetto con il contrassegno rosso nel caso in esame); il puntale negativo è pronto per essere collegato al morsetto negativo ed eseguire quindi la misura. Un voltmetro può essere inserito/disinserito senza problemi dal circuito in prova mentre questi è in funzione (a parte gli aspetti di sicurezza se le tensioni sono elevate).

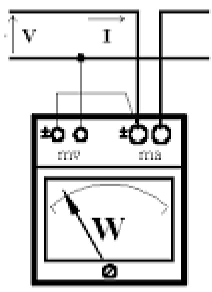
L'***amperometro ideale*** è uno strumento dotato di un *corpo* con due morsetti distinti con un segno + e con un segno – (a volte c'è il solo segno + su un morsetto essendo necessariamente il segno – sull'altro morsetto). La figura seguente illustra a sinistra un amperometro ideale inserito per misurare la corrente *I* che percorre la maglia che costituisce il circuito. Per la misura della corrente lo strumento assume il verso positivo che attraversa lo strumento dal morsetto positivo a quello negativo e quindi è stato inserito correttamente per misurare la corrente *I*. L'amperometro ideale non perturba il circuito, cioè è "come se non ci fosse", ossia "come se ci fosse continuità del conduttore nel quale è inserito": dobbiamo concludere che fra i morsetti dell'amperometro ideale non c'è tensione qualsiasi sia la corrente misurata ovvero esso corrisponde ad un resistore di resistenza $R_A = 0$.



A destra vediamo la corrispondente situazione pratica. Un amperometro (reale) digitale, inserito in un conduttore (blu) percorso dalla corrente *i*. Il verso positivo di misura della corrente è contrassegnato sul corpo dello strumento (il morsetto di sinistra è quindi quello positivo). Siccome l'inserimento di un amperometro richiede il taglio del conduttore (salvo alcuni tipi di amperometri dei quali si parlerà in seguito) l'amperometro non può essere inserito/disinserito mentre il circuito è in funzione.

Il **wattmetro *ideale*** è uno strumento dotato di un *corpo* con due coppie di morsetti: morsetti voltmetrici (assimilabili a quelli di un voltmetro) e morsetti amperometrici (assimilabili a quelli di un amperometro). In ciascuna coppia i morsetti sono distinti con un segno + e con un segno – (a volte c'è il solo segno + su un morsetto essendo necessariamente il segno – sull'altro morsetto). Il wattmetro ideale fornisce il risultato del prodotto P=vi ove v è la tensione applicata ai morsetti voltmetrici e i è la corrente che attraversa i morsetti amperometrici. La figura seguente illustra a sinistra un wattmetro ideale inserito per misurare la potenza che il circuito A eroga (la convenzione di segno è quella dei generatori) e quello B, ovviamente, assorbe (la convenzione di segno è quella dei carichi). La figura centrale mostra una realistica inserzione di un wattmetro (analogico)





Il wattmetro ideale non perturba il circuito, cioè è “come se non ci fosse”: dobbiamo concludere che il suo circuito voltmetrico non è percorso da corrente ($R_V = \infty$ come per un voltmetro) e fra i morsetti amperometrici non c’è tensione ($R_A = 0$ come per un amperometro).

A destra vediamo la foto di un wattmetro reale da banco digitale. Esso misura la corrente e la tensione secondo i due simboli di amperometro e voltmetro riportati sullo strumento ed esegue e mostra il prodotto delle due grandezze. Come per l’amperometro, il wattmetro non può essere inserito/disinserito mentre il circuito è in funzione.

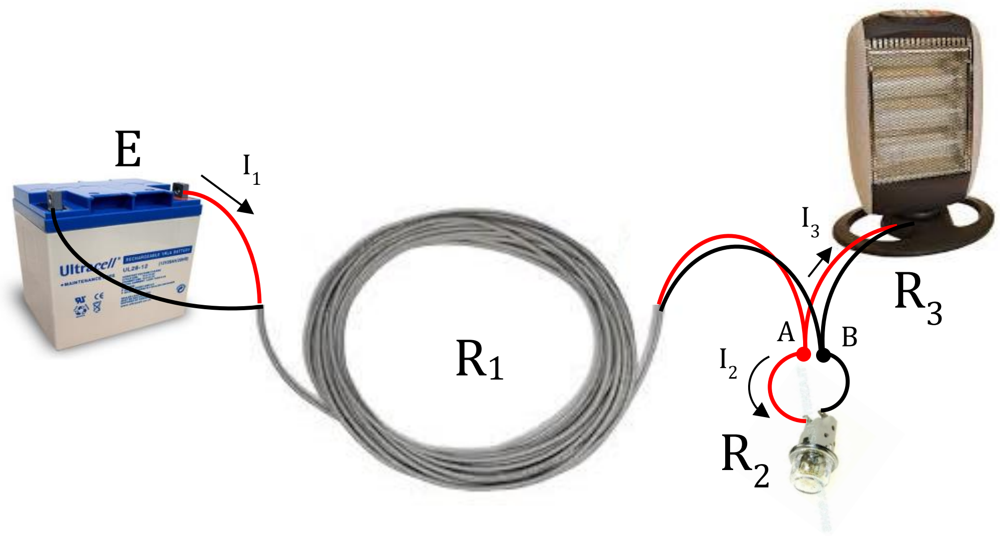
Caitolo 5 - Reti di resistori in corrente continua

Incominciamo ad applicare i concetti visti nei Capitoli precedenti ad alcune reti di resistori in configurazioni "notevoli". Lo facciamo risolvendo alcuni problemi che riproducono situazioni pratiche.

5.1 Resistenze in serie e in parallelo

Problema 5.1: *Prendiamo in esame il circuito elettrico mostrato nel collage sottostante. Un accumulatore da 24 V alimenta attraverso un cavo un faretto con lampada ad incandescenza e quindi, in parallelo, una stufetta elettrica alogena. Il cavo in rame ha un lunghezza di 6 m e una sezione di 2.5 mm²; la targa della lampada riporta V= 24 V, P=80W; quella della stufetta V=24 V, P = 400 W. Calcolare:*

1. *le correnti I1, I2, I3 indicate in figura*
2. *la tensione sulla lampadina*
3. *le indicazioni degli strumenti ideali che appaiono nello schema circuitale successivo che rappresenta l'impianto elettrico in esame*
4. *la potenza erogata dall'accumulatore.*



Vediamo di tracciare il circuito elettrico che rappresenta la struttura soprariportata. Allo scopo calcoliamo prima i parametri con cui caratterizzare i singoli componenti.

L'accumulatore sarà rappresentato con un generatore ideale di forza elettromotrice E = 24 V. Schematizzazioni più accurate di "generatori reali" saranno ricavate in seguito.

Il cavo presenta una sua resistenza R_1 che possiamo calcolare con la formula della resistenza di un conduttore filiforme:

$$R_1 = \rho \frac{l}{S} = 0.018 \frac{6}{2.5} = 0.04320 \, \Omega$$

Notare che abbiamo usato nella formula una lunghezza pari a quella del cavo, calcolando così la resistenza del singolo conduttore di andata (e del singolo conduttore di ritorno).

La lampada ad incandescenza la possiamo pure rappresentare con una resistenza di valore R_2 tale da soddisfare i dati di targa della lampada stessa. Prendendo l'espressione della potenza di un resistore in funzione della tensione e della resistenza ($P=V^2/R$) ricaviamo

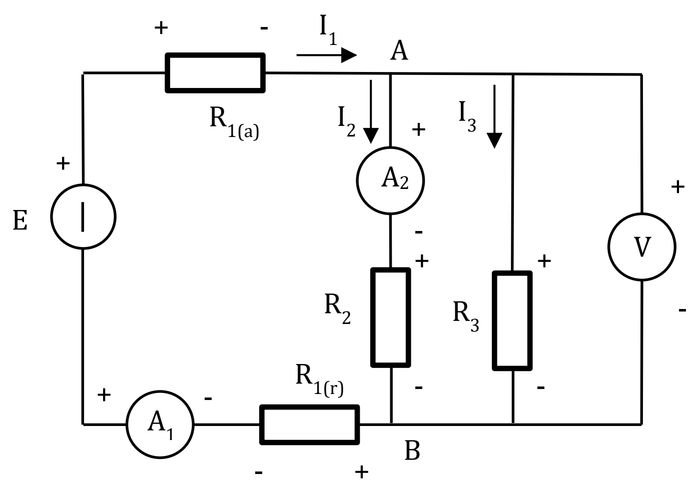
$$R_2 = \frac{V^2}{P} = \frac{24^2}{80} = 7.200 \, \Omega$$

Stessa cosa facciamo per la stufetta calcolando la resistenza R_3 con la formula

$$R_3 = \frac{V^2}{P} = \frac{24^2}{400} = 1.440 \, \Omega$$

Il circuito elettrico può infine essere disegnato come sotto riportato. Il cavo è rappresentato con due resistenze identiche pari a R_1, una per il filo di andata ($R_{1(a)}$) e una per il filo di ritorno ($R_{1(r)}$), collegate fra i morsetti del generatore di tensione e quelli dei due carichi, faretto e stufetta, posti in parallelo. Nel circuito appaiono anche, per scopi didattici, due amperometri e un voltmetro (non presenti nella figura precedente)[2]. Indichiamo i versi positivi delle correnti così come stabiliti dal testo del problema e fisiamo il verso positivo delle **tensioni sui resistori secondo la convenzione disegno degli utilizzatori.**

Possiamo ora risolvere il circuito. Lo si può fare in vari modi. Qui useremo le formule della resistenza equivalente di resistenze in parallelo o in serie.



Si è già detto che gli strumenti ideali non perturbano il circuito: *è come se non ci fossero*. Per trovare le grandezze che cerchiamo possiamo allora usare il circuito seguente, dove gli strumenti sono stati

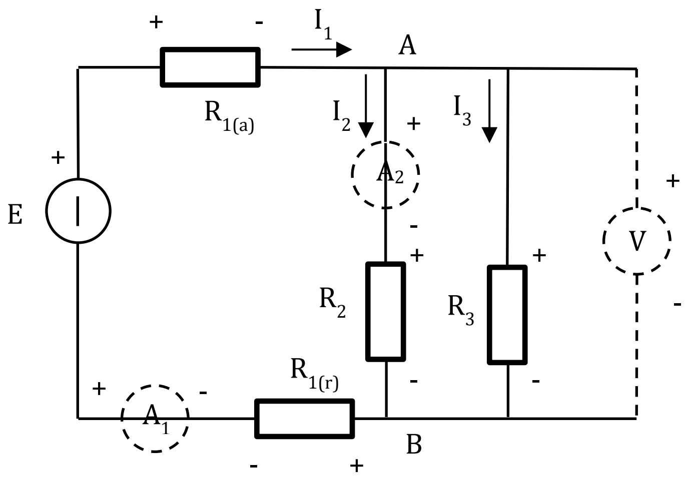
[2] Autovalutazione: disegnare nel collage della prima figura i tre strumenti citati, con i versi positivi di misura.

rimossi e mostrati solo con la loro traccia per ricordare dove erano collocati. Gli amperometri sono sostituiti con collegamenti diretti fra i due morseti (cortocircuiti) mentre il voltmetro costituisce un'interruzione del circuito (circuito aperto). Si vede che *i due resistori R_2 e R_3 e il voltmetro sono in parallelo perché sottoposti alla stessa tensione V_{AB}* (tutti collegati fra A e B):

$$V_{R2} = V_{R3} = V_V = V_{AB} \quad per\ il\ principio\ di\ Kirchhoff\ delle\ tensioni$$

mentre le correnti soddisfano la condizione che deriva dal principio di Kirchhoff delle correnti, applicato per esempio al punto A

$$I = I_2 + I_3 \quad per\ il\ principio\ di\ Kirchhoff\ delle\ correnti$$



Sostituiamo le correnti con la loro espressione in funzione delle tensioni e delle resistenze

$$I = \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = V\left(\frac{1}{R_{eq,23}}\right)$$

da cui vediamo che i due resistori in parallelo sono equivalenti ad una resistenza pari a

$$R_{eq,23} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

e se i resistori in parallelo invece di 2 fossero n, numerati da 1 a *n*

$$\boxed{R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} \qquad R_{eq}\ del\ parallelo\ di\ n\ resistori}$$

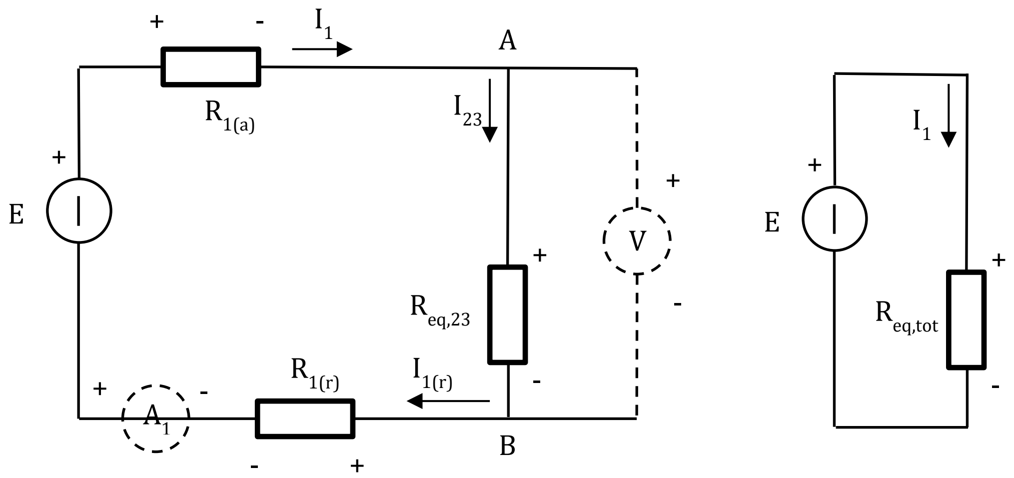
Merita mettere in evidenza che se abbiamo il parallelo di due e solo due resistori, come nel nostro problema, la formula si può riscrivere anche come:

$$R_{eq,23} = \frac{R_2 \, R_3}{R_2 + R_3} \quad (solo\ per\ due\ resistori)$$

Applichiamola al nostro problema per ottenere

$$R_{eq,23} = \frac{1}{\frac{1}{7.200} + \frac{1}{1.440}} = \frac{7.200 \, * \, 1.440}{7.200 \, + \, 1.440} = 1.200 \, \Omega$$ [3]

Possiamo ora sostituire il parallelo delle due resistenze con la sua resistenza equivalente ottenendo il circuito sotto.



Si riconosce che è costituito da una sola maglia percorsa, con senso positivo orario dalla corrente $\mathbf{I_1 = I_{23} = I_{1(r)}}$, che sarà pari alla fem E divisa per la totale resistenza della maglia (a destra in figura). *I tre resistori sono in serie, perché percorsi dalla stessa corrente*. Per il principio di Kirchhoff delle tensioni e tendo conto dei versi positivi delle stesse, possiamo scrivere per la maglia:

$$E = V_{R1(a)} + V_{Req,23} + V_{R1(r)}$$

Esprimendo le tensioni in funzione delle correnti con la legge di Ohm e ricordando che la corrente è la stessa per tutti i bipoli abbiamo:

$$\mathrm{E} = I_1 R_{1(a)} + I_1 R_{eq,23} + I_1 R_{1(r)} = I_1 (R_{1(a)} + R_{eq,23} + R_{1(r)}) = I_1 (R_{eq,tot})$$

ove $R_{eq,tot}$ è la resistenza equivalente della serie del tre resistori, pari a:

$$R_{eq.tot} = R_{1(a)} + R_{eq,23} + R_{1(r)}$$

[3] La resistenza equivalente del parallello di più resistenza è sempre minore della più piccola.

e se i resistori in serie invece di 3 fossero n, numerati da 1 a *n*

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \qquad R_{eq}\ della\ serie\ di\ n\ \ resistori}$$

Applichiamola al nostro problema per ottenere la resistenza equivalente totale della maglia

$$R_{eq,tot} = 0.04320 + 1.200 + 0.04320 = 1.286\ \Omega$$ [4]

e allora troviamo

$$I_1 = \frac{E}{R_{eq,tot}} = \frac{24}{1.286} = 18.66\ A$$

Infine, nota la corrente risulta facile trovare:

$$V_{AB} = V_{Req,23} = I_1 R_{eq,23} = 18.66 * 1.2 = 22.39\ V$$

che è anche la *tensione V_V indicata dal voltmetro*

$$I_2 = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{22.39}{7.20} = 3.110\ A$$

che è anche la *corrente I_{A2} indicata dall'amperometro A_2* inserito proprio nel ramo ove scorre la I_2 e con verso di misura coincidente con quello della I_2 stessa. E poi:

$$I_3 = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{22.39}{1.44} = 15.55\ A$$

Per quanto riguarda l'indicazione *I_{A1} dell'amperometro A_1* si riconosce che esso è inserito nel ramo dove circola la $I_{1(r)} = I_1$ ma il suo verso di inserzione è tale che lo strumento misura la corrente assumendo il verso positivo che va da sinistra a destra in figura è cioè contrario a quello positivo di $I_{1(r)}$.

Avremo allora

$$I_{A1} = -I_{1(r)} = -I_1 = -18.66\ A$$

Infine, per quanto riguarda la *potenza erogata* dal generatore, dobbiamo calcolarla dalle sue tensione e corrente calcolate con versi positivi coordinati secondo la *convenzione di segno dei generatori*. Già lo sono con riferimento alla fem E e alla corrente I_1 per cui abbiamo:

[4] La resistenza equivalente della serie di più resistenza è sempre maggiore della più grande.

$$P_E = E\, I_1 = 24 * 18.66 = 447.8\ W$$

Possiamo completare il problema calcolando anche le potenze assorbite dai resistori ottenendo:

$$P_{R1} = P_{R1(a)} = P_{R1(r)} = R_1\, I_1^2 = 0.0432 * 18.66^2 = 15.04\ W$$

$$P_{R2} = R_2\, I_2^2 = 7.2 * 3.110^2 = 69.64\ W$$

$$P_{R3} = R_3\, I_3^2 = 1.44 * 15.55^2 = 348.2\ W$$

È importante constatare che la somma delle potenze assorbite è pari a:

$$\sum P_R = P_{R1(a)} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R1(r)} = 447.9\ W$$

cioè corrispondente alla potenza erogata del generatore. La differenza è dovuta all'arrotondamento alla 4ª cifra significativa di tutti i valori elaborati[5]. Questo risultato non è casuale. Dobbiamo ricordare infatti che per ogni circuito vale *il principio di conservazione delle potenze* che si esprime scrivendo

$$\boxed{\sum P_{assorbite} = \sum P_{erogate} \qquad \textit{principio di conservazione delle potenze}}$$

dove le potenze assorbite sono quelle calcolate con la convenzione di segno degli utilizzatori (ma alcune di esse o anche tutte potrebbero essere di valore negativo) e le potenze erogate sono quelle calcolate con la convenzione dei generatori (ma alcune di esse o anche tutte potrebbero essere di valore negativo). Le sommatorie sono quindi sommatorie algebriche ed ogni coppia di tensioni e correnti che definisce una potenza deve essere compresa in una e una sola sommatoria.

La verifica che il principio di conservazione delle potenze sia soddisfatto è buona norma per assicurarsi di non avere fatto errori nella risoluzione dei circuiti.

5.2 Partitori resistivi di corrente e di tensione

Le formule del partitore di corrente e del partitore di tensione, che rispettano ovviamente i principi di Kirchhoff da cui sono derivate, servono per valutare come si ripartisce la corrente fra due resistori in parallelo (partitore resistivo di corrente) o come si ripartisce la tensione su due resistori in serie (partitore resistivo di tensione). Vediamo di ricavarle e poi di applicarle al problema precedete.

Partitore di corrente – Prendiamo in considerazione il parallelo di due resistenze come mostrato a sinistra nella figura sottostante. Essendo in parallelo, le loro tensioni sono identiche, se orientate coerentemente, cioè mettendo i due segni + sullo stesso nodo e i due segni - sull'altro. Orientiamo poi anche le correnti in modo coerente con la convenzione di segno degli utilizzatori e tali da poter per scrivere:

[5] Si suggerisce di usare almeno 4 cifre significative nello svolgimento dei problemi numerici.

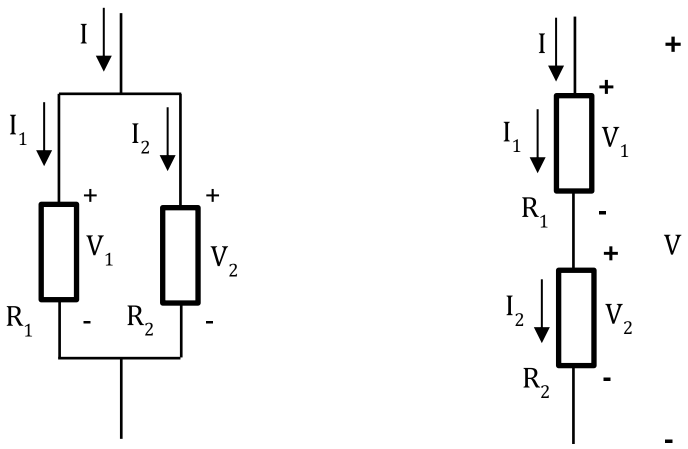
$$I = I_1 + I_2$$

Allora l'uguaglianza delle tensioni porta a scrivere:

$$V_1 = I_1 R_1 = I_2 R_2 = V_2$$

da cui

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \textit{partitore di corrente resistivo}$$



che, a parole, si legge: *la corrente totale I in un partitore resistivo si ripartisce nelle due frazioni* I_1 *e* I_2 *in maniera inversamente proporzionale alle due resistenze, ossia la resistenza più grande si prende la frazione di corrente più piccola e viceversa*.

Se applichiamo ora la regola del comporre delle proporzioni possiamo scrivere:

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

da cui

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad \textit{partitore di corrente resistivo}$$

e analogamente si otterrebbe

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \textit{partitore di corrente resistivo}$$

che forniscono le correnti nei singoli rami in funzione della corrente totale.

Partitore di tensione – Prendiamo in considerazione la serie di due resistenze come mostrato a destra nella figura precedente. Essendo in serie, le loro correnti sono identiche, se orientate coerentemente, cioè collegando il terminale di uscita della corrente del primo resistore al terminale di ingresso della corrente del secondo. Orientiamo poi anche le tensioni in modo coerente con la convenzione di segno degli utilizzatori e tali da poter per scrivere:

$$V = V_1 + V_2$$

Allora l'uguaglianza delle correnti porta a scrivere:

$$\mathrm{I}_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = I_2$$

da cui

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \textit{partitore di tensione resistivo}}$$

che, a parole, si legge: *la tensione totale V ai capi di un partitore resistivo si ripartisce nelle due frazioni V_1 e V_2 in maniera proporzionale alle due resistenze, ossia la resistenza più grande si prende la frazione di tensione più grande e quella più piccola la frazione più piccola*.

Se applichiamo ora la regola del comporre delle proporzioni possiamo scrivere:

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{V_1}{V} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

da cui

$$\boxed{V_1 = V\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \textit{partitore di tensione resistivo}}$$

e analogamente si otterrebbe

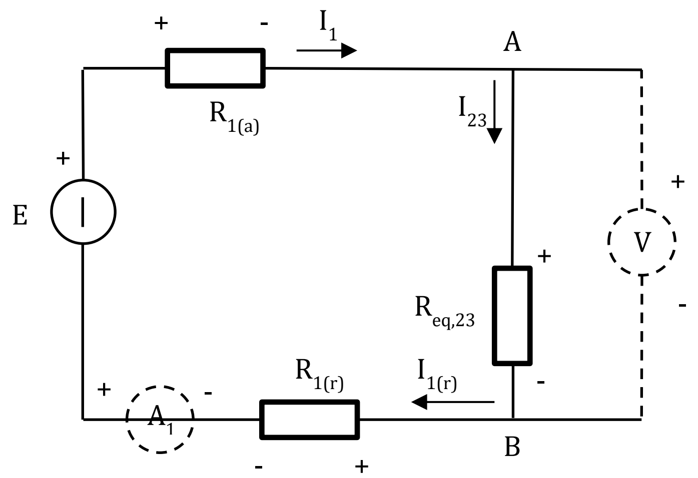
$$\boxed{V_2 = V\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad \textit{partitore di tensione resistivo}}$$

che forniscono le tensioni nei singoli resistori in funzione della tensione totale.

Applichiamo le formule appena ricavate al Problema 5.1. Dopo aver calcolato la $R_{eq,23}$ noi siamo al seguente schema elettrico.

La tensione V_{AB} la possiamo calcolare con la formula del partitore di tensione

$$V_{AB} = E\frac{R_{eq,23}}{R_{eq,23} + 2 * R_1} = 24\ \frac{1.2}{1.2 + 2 * 0.0432} = 22.39\ V$$



Poi, la corrente della maglia

$$I_1 = I_{23} = \frac{V_{AB}}{R_{eq,23}} = \frac{22.39}{1.2} = 18.66 \ A$$

e, infine le correnti I_2 e I_3 con la formula del partitore di corrente

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 18.66 \ \frac{1.440}{7.200 + 1.440} = 3.110 \ A$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 18.66 \ \frac{7.200}{7.200 + 1.440} = 15.55 \ A$$

Tutto il resto è come prima.

5.3 Risoluzione delle reti con i principi di Kirchhoff

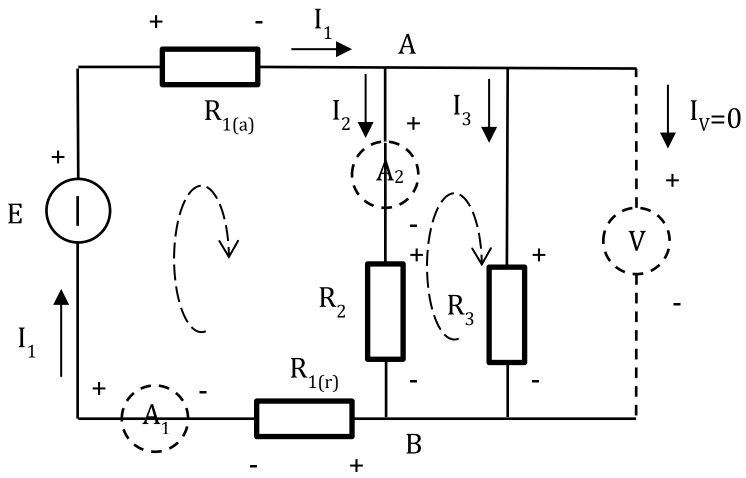
Vediamo di risolvere lo stesso circuito con le leggi generali dei circuiti elettrici, cioè i principi di Kirchhoff e le equazioni dei componenti costitutivi il circuito, senza ricorrere a riduzione della configurazione con operazione di serie parallelo e/o senza utilizzare soluzioni preconfezionate per particolari configurazioni come le formule dei partitori. Si tratta di capire come vanno scritte le equazioni generali.

Consideriamo allora il circuito in esame che è qui sotto rappresentato nel quale gli strumenti ideali (*che è come se non ci fossero*) sono stati eliminati. A tutto il ramo di sinistra del circuito è stata assegnata la corrente I_1 come ora è facilmente comprensibile.

Prima di tutto applichiamo il principio di Kirchhoff per le correnti confluenti nel noto A

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Lo stesso principio al nodo B porterebbe alla stessa equazione e quindi è inutile.



Si può dimostrare che, dato un circuito con N nodi, le equazioni indipendenti che si possono scrivere col principio di Kirchhoff per le correnti sono N-1.

Poi applichiamo il principio di Kirchhoff delle tensioni ad alcune maglie.

Si può dimostrare che, dato un circuito piano (senza sovrapposizione di lati) con M maglie elementari (o anelli o finestre), cioè percorsi chiusi di bipoli del circuito all'interno dei quali non c'è alcun altro bipolo, le equazioni indipendenti che si possono scrivere col principio di Kirchhoff per le tensioni sono proprio M e possono per esempio essere scritte proprio con riferimento agli anelli.

Nel caso del nostro circuito, gli anelli sono 2 e sono evidenziati dalle frecce curvilinee di figura, che ci danno anche il verso positivo (scelto ad arbitrio) assunto per gli anelli. Applicando il principio di Kirchhoff delle tensioni otteniamo

$$E = V_{R1(a)} + V_{R2} + V_{R1(r)}$$

$$V_{R2} = V_{R3}$$

dove a sinistra delle uguaglianze sono le tensioni discordi e a destra le concordi al verso positivo di anello.

Infine aggiungeremo per ciascuna resistore useremo la sua descrizione V=RI della legge di Ohm (<u>è necessario che prioritariamente le loro tensioni e correnti siano state scelte con versi positivi coerenti alla convenzione di segno degli utilizzatori</u>). Ciò che si ricava è il sistema risolutivo, formato dalle 3 equazioni dovute ai principi di Kirchhoff e alle 4 equazioni dei resistori (totale 7 equazioni) nelle 7 incognite che sono le tensioni si ciascun resistore e le tre correnti.

Sostituendo l'equazione delle correnti e quella delle leggi di Ohm nelle due equazioni di bilancio delle tensioni sopra scritte, il sistema si semplifica:

$$E = R_1(I_2 + I_3) + R_2 I_2 + R_1(I_2 + I_3)$$
$$R_2 I_2 = R_3 I_3$$

che, ordinato, è un sistema di due equazioni in due incognite la cui soluzione fornisce le correnti I_2 e I_3, dalle quali poi, a ritroso, si calcolano tutte le altre grandezze richieste.

E' utile esercizio per lo studente lo svolgimento di quest'ultima fase.