

PARTE C

Elettromagnetismo

Premessa – Questa parte delle dispense è dedicata alla “*Elettromagnetismo*” che riguarda lo studio del comportamento dei sistemi elettrici in presenza di grandezze (tensioni e correnti) variabili nel tempo. Lo studio richiede di definire il campo magnetico e di riconsiderare i principi di Kirchhoff, in particolare quello delle tensioni.

Saranno anche introdotti nuovi componenti elettrici come l'induttore e il mutuo induttore e forniti gli strumenti per lo studio dei materiali e dei circuiti magnetici.

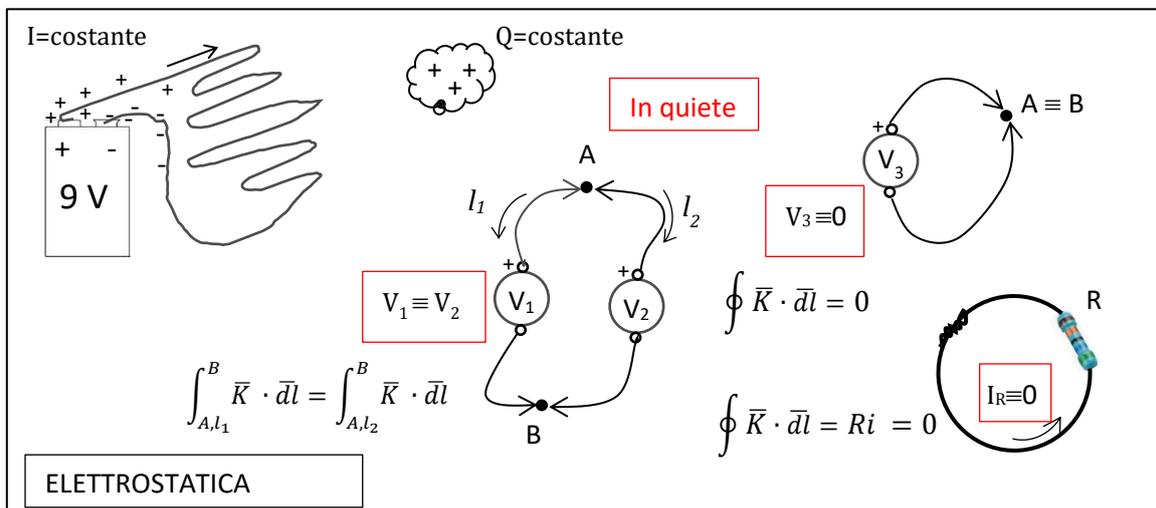
Capitolo 10 - Campo magnetico



Evidenza sperimentale – Le problematiche elettriche fin qui introdotte, esaminate e risolte, si inquadrano nella disciplina dell’*Elettrostatica* (che è solo una parte del più generale Elettromagnetismo che vedremo qui di seguito).

Una possibile situazione di Elettrostatica è rappresentata nel riquadro della figura sottostante. C’è un circuito (a sinistra) alimentato da un generatore di tensione di 9V costanti che è quindi percorso da una corrente costante, sostenuta da un campo elettrico dovuto alle cariche positive e negative che si vanno a depositare (in modo opportuno) sui morsetti e sul circuito cosicché ci siano delle linee di campo che percorrono il circuito. Poi c’è un corpo generico carico con una carica costante positiva. Se si potesse fare una sequenza di fotografie con una immaginaria “elettrocamera” che sia sensibile alla densità di carica nei vari punti che inquadra (come esiste la termocamera che fa immagini sensibili alla temperatura dei vari punti) vedremmo sempre la stessa immagine, anche se nel circuito con la pila c’è una corrente elettrica (ogni carica che si sposta è però sostituita da quella adiacente identica).

Ci sono poi tre ulteriori elementi: i due voltmetri V_1 e V_2 i cui puntali sono in contatto con la stessa coppia di punti A e B; il voltmetro V_3 i cui cordoni sono chiusi su sé stessi; e, infine, un resistore R i cui terminali sono stati collegati fra di loro in modo da formare una spira conduttrice chiusa. E tutti gli elementi, compresi i voltmetri con i loro cordoni, sono in quiete e pertanto indeformabili e in posizioni reciproche immutabili.



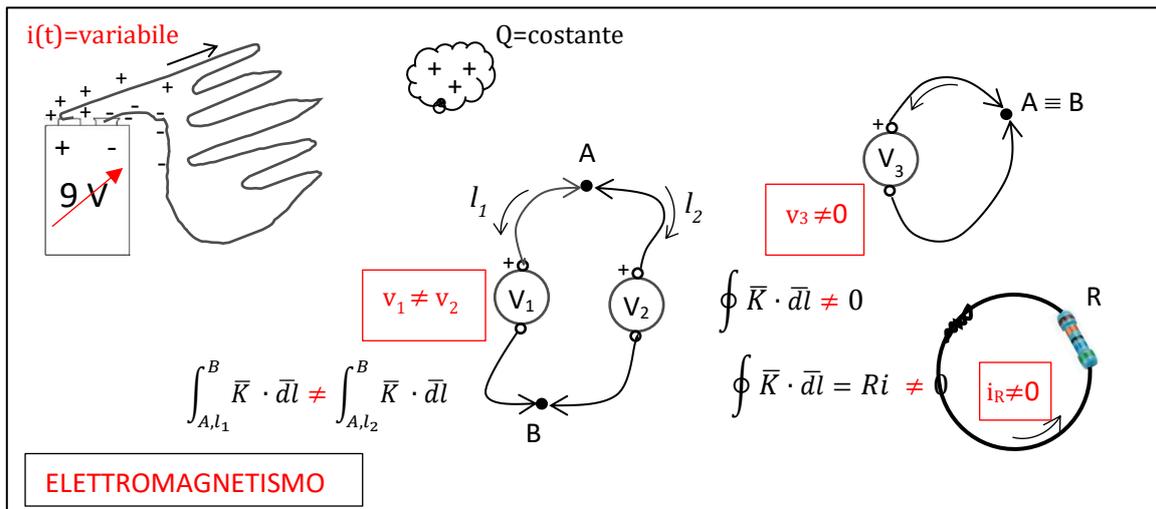
In queste condizioni valgono di certo le leggi dell’elettrostatica viste nei precedenti capitoli.

In particolare:

- Le indicazioni dei due voltmetri V_1 e V_2 sono identiche: la tensione fra due punti A e B (cioè l’integrale del campo elettrico lungo una linea che va da A a B) è indipendente dalla linea scelta secondo la quale la tensione si calcola (per l’indicazione dei voltmetri la linea è definita dai loro cordoni).
- L’indicazione del voltmetro V_3 è nulla: l’integrale del campo elettrico su una qualsiasi linea chiusa è sempre nullo (da cui deriva la legge di Kirchhoff delle tensioni).

c) A seguito di b), l'integrale lungo una spira conduttrice, che è pari a Ri essendo R la resistenza della spira, è nullo e quindi la corrente nella spira conduttrice di destra in figura è identicamente nulla.

Nel caso in cui, invece, qualcuna delle assunzioni sopra fatte venisse a mancare, i tre importanti risultati sopra elencati non si manifestano. L'evidenza sperimentale mostrerebbe per esempio che se la corrente $i(t)$ nel circuito di sinistra fosse variabile, immaginando che la tensione della pila sia variabile nel tempo (come rappresentato nella figura seguente) le indicazioni dei due voltmetri V_1 e V_2 non sarebbero più identiche, così come l'indicazione del voltmetro V_3 sarebbe diversa da zero e nella spira conduttrice chiusa circolerebbe una corrente non nulla.



In particolare, il fatto che l'indicazione del voltmetro V_3 sia diversa da zero significa che:

$$v_3 = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

e quindi il campo elettrico non può essere solo coulombiano K_e (che pure ci sarà perché ci sono delle cariche accumulate qua e là nello spazio) il cui integrale chiuso è nullo, ma ci deve essere anche un'altra componente della campo elettrico detta *campo elettrico impresso* o *indotto* K_i per cui si possa scrivere:

$$v_3 = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{K}_e + \vec{K}_i) \cdot d\vec{l} = \underbrace{\left(\oint \vec{K}_e \cdot d\vec{l} + \oint \vec{K}_i \cdot d\vec{l} \right)}_{=0} = \oint \vec{K}_i \cdot d\vec{l} \neq 0$$

ove l'integrale chiuso cambia al cambiare della linea chiusa scelta.

Applicando quanto dedotto alla spira conduttrice di destra dobbiamo scrivere

$$\oint \vec{K} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{K}_i \cdot d\vec{l} = e_i = Ri \neq 0$$

ove il valore dell'integrale chiuso (diverso da zero), indicato con e_i , prende il nome di *forza elettromotrice indotta* che, in virtù del legame fra campo elettrico e densità di corrente (vedi Capitolo 2) sarà uguale al prodotto Ri , ove R è la totale resistenza della spira.

Lo stesso accadrebbe se, pur con una corrente $i(t)=I=costante$ nel circuito di sinistra, le posizioni reciproche dei diversi elementi venissero fatte variare.

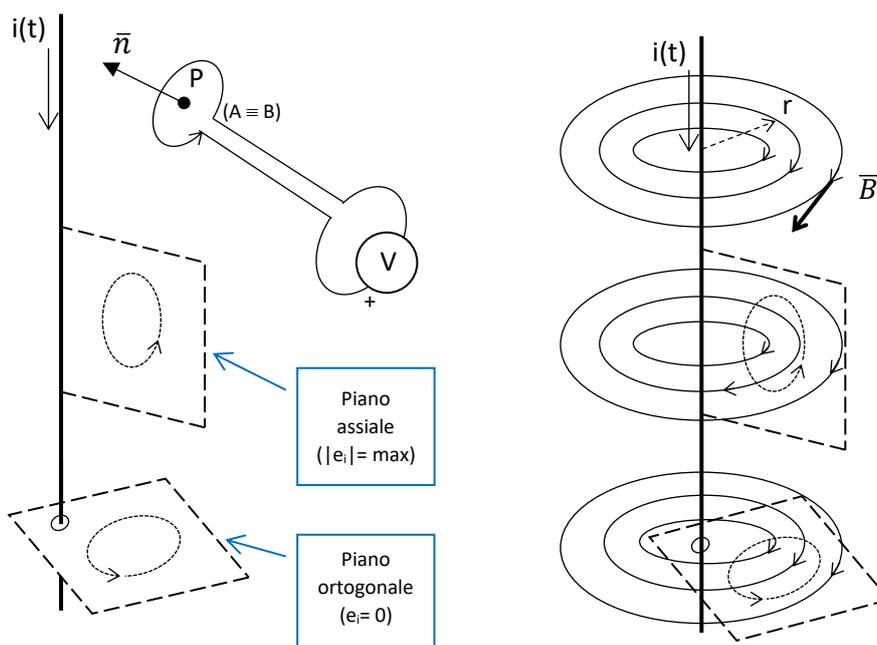
Per descrivere questi nuovi comportamenti dobbiamo allora introdurre nuove equazioni ed ampliare quelle già viste, nella sostanza dobbiamo considerare la disciplina più generale dell'Elettromagnetismo, del quale l'Elettrostatica diventerà un caso particolare.

Incominciamo con il trovare una descrizione ed una ragione per il campo indotto K_i .

10.1 Campo magnetico - Abbiamo visto che il concetto di campo elettrostatico (coulombiano) non è sempre sufficiente per giustificare le forze che agiscono sulle cariche elettriche. Quando per esempio abbiamo una corrente $i(t)$ variabile nel tempo (che significa che la distribuzione delle cariche sta mutando) osserviamo dei fenomeni che non si concepiscono con il campo coulombiano, come per esempio la nascita di una forza elettromotrice in una spira chiusa, misurabile con un voltmetro inserito in quella spira. Bisogna assumere che ci sia un'altra entità, oltre al campo elettrico, capace di produrre queste forze elettriche addizionali e questa entità prende il nome di *campo magnetico*.



Studiamo questa entità fisica nel caso particolare (comodo) di una corrente $i(t)$ che percorre un filo rettilineo indefinito. Immaginiamo di realizzare con i cordoni di un voltmetro una piccola spira di prova disposta attorno ad un punto P nei pressi della corrente, come nella figura sotto (i puntali A e B sono coincidenti in uno stesso punto, ma non interessa sapere dove esso sia).



Dobbiamo immaginare che la spira di prova sia sufficientemente piccola da poter dire che stiamo studiando quello che accade presso il punto P e che solo attorno al punto P c'è la spira mentre per il resto i cordoni sono fra loro sovrapposti e il voltmetro ha dimensioni trascurabili¹. Orientiamo la spira secondo il verso positivo di percorrenza che va dal morsetto positivo a quello negativo del voltmetro, attraversando lo strumento. Per indicare l'orientazione nello spazio della spira usiamo un vettore \vec{n} diretto secondo il verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruota secondo il verso positivo di percorrenza della spira. Immaginiamo inoltre che

¹ I cordoni distanziati e che si allargano attorno allo strumento in figura sono solo esigenze grafiche.

non ci sia alcun'altra corrente nei dintorni e che tutto sia immerso in uno spazio *vuoto* omogeneo di dimensioni infinite.

Per quanto detto precedentemente, il voltmetro indicherà la fem e_i indotta nella spira, pari all'integrale chiuso del campo indotto K_i calcolato secondo il verso positivo di percorrenza prescelto per la spira.

L'osservazione sperimentale mostra che:

1. La forza elettromotrice e_i (indicazione del voltmetro), con la spira collocata attorno ad un dato punto P e con una fissata orientazione è proporzionale alla derivata della corrente di/dt (proporzionale in ampiezza e segno).
2. La forza elettromotrice e_i dipende dal punto P; a parità di derivata della corrente e di orientazione, diminuisce al crescere della distanza r dal conduttore che porta la corrente $i(t)$.
3. La forza elettromotrice e_i raccolta con la spira in un certo punto P dipende dall'orientazione della spira stessa, cioè dalla direzione del versore \vec{n} . Se la spira è collocata in un piano assiale che contiene il conduttore con la corrente $i(t)$ (una sorta di "bandiera"), a parità di derivata della corrente, la forza elettromotrice e_i è di valore assoluto massimo e cambia di segno invertendo l'orientamento della spira (cioè il verso del versore \vec{n}). Se invece è collocata in un piano ortogonale al percorso della corrente $i(t)$ allora $e_i = 0$ per qualsiasi derivata della corrente e per qualsiasi punto P. I due casi sono esemplificati in figura.
4. La forza elettromotrice e_i cresce al crescere delle dimensioni della spira (seppur piccola).

Le osservazioni sono compatibili con la conclusione che:

- a) La corrente $i(t)$ crea un campo, che chiameremo *campo di induzione magnetica* \vec{B} , le cui linee di campo stanno nei piani ortogonali al percorso della corrente $i(t)$ e sono circolari e concentriche con la corrente stessa.
- b) La spira di prova "concatena" (si fa attraversare, come l'anello di una catena attraversa quello vicino) da un certo numero di queste linee di campo, a seconda della sua posizione e del suo orientamento. Possiamo allora definire il *flusso magnetico concatenato* ϕ_c per misurare questo risultato come

$$\phi_c = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

ove S è una superficie contornata dalla spira di prova (che si appoggia sulla spira di prova come una cuffia o come la rete di una racchetta da tennis). Vogliamo che il risultato sia sempre lo stesso per qualsiasi superficie che si appoggia sulla (stessa) spira, ossia che tutte le superfici con lo stesso contorno siano attraversate dalle stesse linee di induzione magnetica \vec{B} . Non ci devono quindi essere punti in cui le linee di \vec{B} finiscono (pozzi) o nascono (sorgenti). Il campo di induzione magnetica \vec{B} che vogliamo definire deve avere linee chiuse su sé stesse (si dice che deve essere *solenoidale*). Riconosciamo dalla sua definizione che il flusso magnetico concatenato ϕ_c è un grandezza scalare con segno, mentre \vec{B} è ovviamente una grandezza vettoriale.

- c) Per riprodurre le osservazioni sperimentali dobbiamo pensare che l'ampiezza del vettore induzione magnetica \vec{B} in ogni punto sia proporzionale alla corrente $i(t)$, cosicché proporzionale alla corrente risulta anche il flusso magnetico concatenato ϕ_c con una prefissata spira e la derivata di/dt della corrente causa una corrispondente derivata $d\phi_c/dt$ del flusso magnetico concatenato, alla quale si potrà legare la fem indotta e_i .
- d) Più precisamente, con i versi positivi prescelti e già fissati, le osservazioni sperimentali ci dicono che vale:

$$e_i = - \frac{d\phi_c}{dt} \quad \text{legge dell'induzione elettromagnetica (legge di Faraday – Neumann)}$$

e) Infine, per la configurazione esaminata costituita da un sistema con una corrente rettilinea indefinita troviamo che l'ampiezza del vettore induzione magnetica \vec{B} in ogni punto risulta dato dalla:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \quad \text{legge di Biot – Savart (conduttore rettilineo nel vuoto)}$$

ove i è l'intensità della corrente elettrica nel conduttore e r la distanza del punto considerato dal conduttore stesso. Il coefficiente μ_0 prende il nome di *permeabilità magnetica del vuoto*. La direzione di \vec{B} è quella di rotazione di una vite destrorsa che avanza nella direzione della corrente.

10.2 Unità di misura - Prima di procedere oltre, possiamo definire le unità di misura delle nuove grandezze introdotte.

Per la legge di Faraday-Neumann il *flusso concatenato* ϕ_c (rapportato con un tempo dà una tensione) deve essere espresso in volt-secondo [Vs], unità di misura cui è stato dato il nome di *weber* [Wb].

Allora l'*induzione magnetica* \vec{B} (il cui integrale di superficie dà il flusso concatenato; per questo \vec{B} è denominata anche: *densità di flusso*) sarà espressa in volt-secondo/metro quadrato [Vs/m²] oppure in weber/metro quadrato [Wb/m²], unità di misura denominata *tesla* [T].

Infine per la *permeabilità magnetica* μ_0 , dalla legge di Biot-Savart riconosciamo che deve essere espressa in una di queste unità di misura: [Wb/m²][m/A] = [Vs/m²][A/m] = [Wb/A][1/m] = [Vs/A][1/m] = [H/m] avendo introdotto l'unità di misura *henry* [H] = [Wb/A] = [Vs/A].

NB: notiamo che [H] = [Vs/A] = [V/A][s] = [Ωs].

Con le unità di misura stabilite si trova $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1.256 \cdot 10^{-6}$ H/m

Il semplice caso che stiamo esaminando ci consente di ricavare un'importante legge che è la legge di circuitazione o *legge di Ampere*.

Immaginiamo di fare l'integrale chiuso di linea di \vec{B} lungo una sua linea di campo: In tal caso il vettore \vec{B} e il vettore $d\vec{l}$ di integrazione sono paralleli per definizione e il prodotto scalare fra i due diventa il prodotto dei rispettivi moduli, con quello di B costante. Si ottiene:

$$\oint_{\text{linea del campo}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{linea del campo}} B dl = B 2\pi r = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}\right) 2\pi r = \mu_0 i$$

Se ora definiamo un nuovo vettore $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, della stessa direzione e verso di \vec{B} , l'integrale chiuso diventa più semplicemente:

$$\oint_{\text{linea del campo}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{linea del campo}} \frac{B}{\mu_0} dl = \frac{B}{\mu_0} 2\pi r = \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}\right) \frac{2\pi r}{\mu_0} = i$$

Questo risultato che è stato ricavato in una condizione molto semplice (corrente in un singolo conduttore rettilineo immerso nel vuoto) si dimostra che ha però validità generale.

Vale sempre, per qualsiasi linea chiusa (non necessariamente linea del campo):

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i \quad \text{legge di circuitazione}$$

ove i è la totale corrente che concatena la linea chiusa di integrazione e

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \text{ campo magnetico}$$

e μ è la permeabilità punto per punto del mezzo (se ne parlerà più avanti) nel quale si sviluppa la linea chiusa. La legge di circuitazione vale cioè anche per mezzi non omogenei ed anche se la linea chiusa non è una linea del campo.

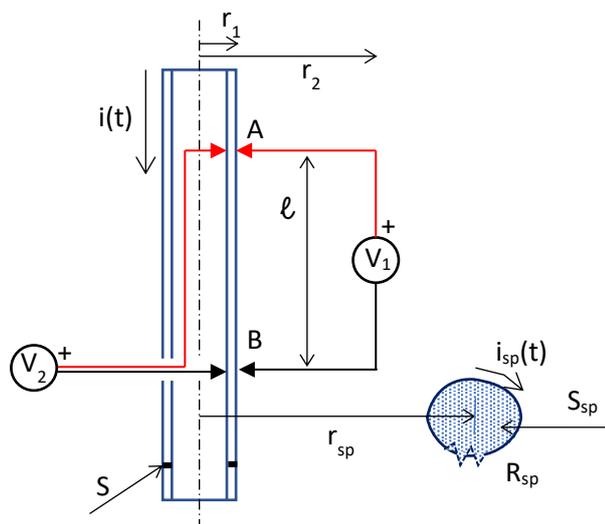
Per concludere, la legge di circuitazione dice che, dimensionalmente, il campo magnetico moltiplicato per una lunghezza dà una corrente e pertanto l'unità di misura di H sarà ampere/metro [A/m].

Problema 10.1 – Si immagini un conduttore tubolare rettilineo di lunghezza infinita, di sezione S , resistività ρ , percorso da una corrente $i(t)$. Prendiamo due punti A e B su due sezioni distanti ℓ . Disponiamo fra i due punti due voltmetri: il voltmetro V_1 con i cordoni disposti all'esterno del conduttore tubolare come mostra la figura (puntale positivo in A); il voltmetro V_2 con i cordoni disposti all'interno del conduttore tubolare (ad esclusione della porzione che fuoriesce ove però i cordoni sono estremamente ravvicinati, come sovrapposti; puntale positivo sempre in A). Consideriamo anche una spira di resistenza R_{sp} fatta con un filo conduttore e disposta ad una certa distanza fissa dal conduttore tubolare.

Alla luce delle equazioni dell'elettrostatica e dell'elettromagnetismo valutiamo le indicazioni dei voltmetri V_1 e V_2 e della corrente $i_{sp}(t)$ nella spira nei due casi:

caso A): $i(t) = I = 100 \text{ A} = \text{costante}$

caso B): $i(t) = 100 \sin(\omega t)$ con $\omega = 2\pi/T$ e $T = 1 \text{ ms}$



Caso A) : Se la corrente è costante e tutti gli elementi sono fissi (in quiete) valgono le leggi dell'elettrostatica e tutte le grandezze saranno costanti (regime stazionario). In tali condizioni sappiamo che la tensione fra due punti dati è indipendente dalla linea di calcolo che collega i due punti: In altre parole, le indicazioni dei due voltmetri sono identiche. D'altra parte, i percorsi costituiti dalle due coppie di cordoni formano una linea chiusa e per essa deve valere il principio di Kirchhoff per le tensioni. In definitiva

$$V_1 = V_2 = \text{costante}$$

Il valore comune delle due indicazioni sarà pari alla resistenza fra le sezione A e B del conduttore moltiplicata per la corrente I che lo percorre.

$$V_1 = V_2 = RI \quad \text{con } R = \rho \ell / S$$

NB – Per provare questo risultato possiamo ricordare il capitolo ove abbiamo definito la resistenza e ripetere qui il ragionamento allora fatto.

Nel conduttore tubolare ci sarà una densità di corrente $\delta = I/S$ e un campo elettrico (di natura coulombiana, siamo in elettrostatica) pari a $K_e = \rho \delta = \rho I/S$ (legge di Ohm per le grandezze specifiche). Densità di corrente e corrispondente campo elettrico nel conduttore tubolare sono vettori orientati da A verso B.

Prendiamo ora un percorso chiuso che va da A a B lungo i cordoni di uno dei due voltmetri e poi da B ad A lungo il conduttore tubolare. Per il principio di Kirchhoff per le tensioni vale

$$\oint \vec{K}_e \cdot \vec{dl} = 0 = \int_{A, \text{cordoni}}^B \vec{K}_e \cdot \vec{dl} + \int_{B, \text{tubo}}^A \vec{K}_e \cdot \vec{dl} = \int_{A, \text{cordoni}}^B \vec{K}_e \cdot \vec{dl} - \int_{A, \text{tubo}}^B \vec{K}_e \cdot \vec{dl}$$

Il primo dei due ultimi integrali è per definizione la tensione indicata dal voltmetro $V_{\text{voltmetro}} = V_1 = V_2$.

Il secondo vede $\vec{K}_e \cdot \vec{dl} = K_e dl$ essendo i due vettori paralleli e pertanto:

$$\int_{A, \text{tubo}}^B \vec{K}_e \cdot \vec{dl} = \int_{A, \text{tubo}}^B K_e dl = \int_{A, \text{tubo}}^B \rho(I/S) dl = \rho(I/S) \int_{A, \text{tubo}}^B dl = \rho(I/S) l = RI$$

e, in definitiva allora:

$$0 = V_{\text{voltmetro}} - RI \quad \text{ovvero } V_{\text{voltmetro}} = V_1 = V_2 = RI.$$

Per quanto riguarda la spira è ragionevole affermare che in essa non ci sarà alcuna corrente: $i_{sp}(t) \equiv 0$.

Caso B) : In questo caso il campo magnetico creato dalla corrente (che c'era anche prima, ma era costante nel tempo: regime stazionario), sarà variabile come la corrente e con esso sarà variabile anche il flusso concatenato da qualsiasi spira o percorso chiuso il quale sarà pertanto sede di una fem indotta pari all'integrale del campo indotto in tale percorso chiuso.

Consideriamo dapprima il percorso chiuso che va da A a B lungo i cordoni del voltmetro V_2 e poi da B ad A lungo il conduttore tubolare. Per le leggi dell'elettromagnetismo deve valere:

$$\oint \vec{K} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi_c}{dt} = \int_{A, \text{cordoni}V2}^B \vec{K} \cdot \vec{dl} + \int_{B, \text{tubo}}^A \vec{K} \cdot \vec{dl} = \int_{A, \text{cordoni}V2}^B \vec{K} \cdot \vec{dl} - \int_{A, \text{tubo}}^B \vec{K} \cdot \vec{dl}$$

Il primo dei due ultimi integrali è per definizione la tensione indicata dal voltmetro V_2 .

Il secondo vede $\vec{K} \cdot \vec{dl} = K dl$ essendo i due vettori paralleli (come prima anche se adesso usiamo K invece di K_e) e pertanto:

$$\int_{A,tubo}^B \vec{K} \cdot \vec{dl} = \int_{A,tubo}^B K dl = \int_{A,tubo}^B \rho(I/S) dl = \rho(I/S) \int_{A,tubo}^B dl = \rho(I/S) l = RI$$

e, in definitiva allora:

$$-\frac{d\phi_c}{dt} = V_2 - RI$$

Ma all'interno del conduttore tubolare non c'è campo magnetico (una circuitazione di H condotta dentro non concatenerebbe alcuna corrente) e quindi il flusso concatenato dal percorso chiuso preso in esame è identicamente nullo come la sua derivata. Ne deduciamo che ancora il voltmetro 2 misura, mettendo in evidenza la dipendenza dal tempo delle grandezze in gioco

$$V_2 = v_2(t) = R i(t)$$

come in regime stazionario.

Ripetiamo ora il ragionamento per il percorso chiuso che va da A a B lungo i cordoni del voltmetro V_1 e poi da B ad A ancora lungo il conduttore tubolare. Per le leggi dell'elettromagnetismo deve valere ancora:

$$\oint \vec{K} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_c}{dt} = \int_{A, cordoni V_1}^B \vec{K} \cdot \vec{dl} + \int_{B, tubo}^A \vec{K} \cdot \vec{dl} = \int_{A, cordoni V_1}^B \vec{K} \cdot \vec{dl} - \int_{A, tubo}^B \vec{K} \cdot \vec{dl}$$

Il primo dei due ultimi integrali è per definizione la tensione indicata dal voltmetro V_1 , e il secondo vale sempre RI

In definitiva vale ora:

$$-\frac{d\phi_c}{dt} = V_1 - Ri$$

ove ϕ_c è il flusso concatenato dal percorso chiuso considerato che è "una bandiera" di altezza l ed estensione radiale $r_2 - r_1$. Quella regione è interessata da un campo di induzione magnetica diversa da zero e variabile nel tempo e quindi lo sarà anche il flusso concatenato.

Non è difficile calcolarlo:

$$\phi_c = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} (l dr) = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

la cui derivata vale

$$\frac{d\Phi_c}{dt} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{di}{dt}$$

Ne deduciamo che il voltmetro 1 misura la tensione V_1 che soddisfa

$$-\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{di}{dt} = V_1 - Ri$$

ovvero

$$V_1 = v_1(t) = R i(t) - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{di}{dt}$$

che è diverso da $v_2(t)$.

Per avere un riscontro quantitativo immaginiamo che i dati geometrici siano:

$r_1 = 20$ mm, spessore tubo 1 mm, $r_2 = 200$ mm, $l = 500$ mm, $\rho = 0.0278$ $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ (alluminio); allora:

$$R = 0.0278 \cdot 0.5 / (2\pi \cdot 20 \cdot 1) = 1.1 \cdot 10^{-4} \quad \Omega$$

e quindi, con la corrente sinusoidale,

$$v_2(t) = 1.1 \cdot 10^{-2} \sin(\omega t) \quad \text{V}$$

Invece per il voltmetro 1 risulta

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 1.1 \cdot 10^{-2} \sin(\omega t) - (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 0.5 / (2\pi) \cdot \ln(10) \cdot [\omega \cdot 100 \cdot \cos(\omega t)] = \\ &= 1.1 \cdot 10^{-2} \sin(\omega t) - 14.5 \cdot 10^{-2} \cos(\omega t) \quad \text{V} \end{aligned}$$

che è una tensione circa 15 volte maggiore di v_2 e quasi in quadratura rispetto a questa.

Per quanto riguarda la corrente nella spira, la sua determinazione richiederebbe informazioni fisico-geometriche che non sono date. Ci limitiamo quindi ad affermare che essa potrà essere diversa da zero e governata dall'equazione:

$$-\frac{d\Phi_{c,sp}}{dt} = e_{i,sp} = R_{sp} i_{sp}$$

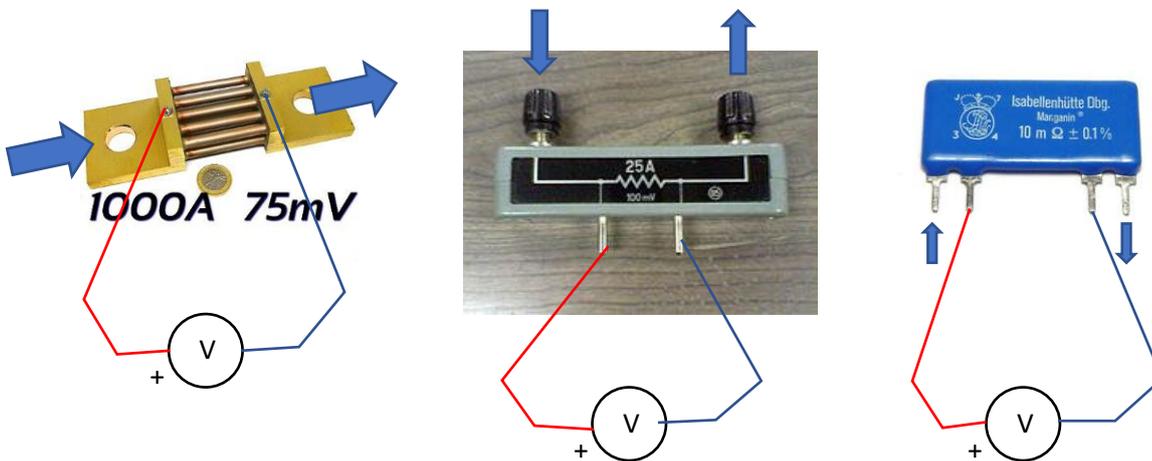
dove peraltro la stessa corrente della spira potrebbe contribuire, più o meno intensamente alla creazione del flusso concatenato (complicando anche per questo lo studio).

10.3 Misura delle correnti mediante shunt – Una delle tecniche usate per misurare la corrente che percorre un dato conduttore è quella di farla passare per una resistenza nota, intenzionalmente inserita in serie nel conduttore (resistenza di shunt), e di misurare quindi, con un voltmetro, la tensione ai capi di detta resistenza. Tre sono principalmente le criticità di questa tecnica di misura:

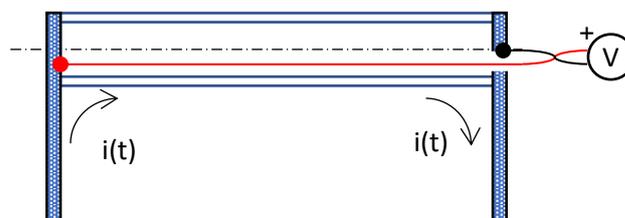
1) La sua adozione richiede che lo strumento entri in contatto con il circuito e ciò può essere insostenibile quando le tensioni sono elevate (pericolose).

2) La resistenza di shunt è necessariamente di piccolo valore per non interferire con il funzionamento del circuito. Ciò comporta che il suo valore potrebbe non essere noto con precisione, perché influenzato anche dalla resistenza di contatto dei collegamenti.

A questo inconveniente si rimedia usando resistenze di shunt a 4 morsetti: 2 per la connessione al circuito e quindi attraversati dalla corrente che si intende misurare e due, più interni, ai quali si collega il voltmetro e fra i quali la resistenza è quindi nota e non influenzata dalle connessioni di potenza. La figura esemplifica il problema.



3) Il problema 10.1 ha evidenziato che la tensione ai capi di una resistenza può non essere un'immagine precisa della corrente che l'attraversa e questo succede quando il circuito di misura concatena del flusso magnetico generato dalla corrente stessa e quest'ultima è variabile nel tempo. Per la misura di correnti a frequenza elevata si realizzano shunt "non induttivi" costituiti da un resistore cavo e con i collegamenti allo strumento di misura (voltmetro) posizionati all'interno dello shunt stesso (e attorcigliati all'esterno) come nella figura che segue che riproduce le condizioni di misura del voltmetro 2 del problema 10.1.



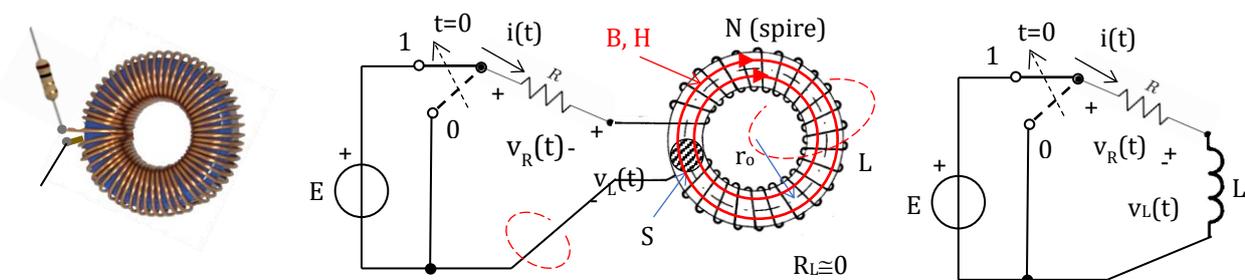
Capitolo 11

Induttore, Induttanza

In questo capitolo si riprende il concetto di *induttore elettrico* che dovrebbe essere stato trattato nella parte di “elettrologia” dell’insegnamento di Fisica. Aspetti concettuali vanno recuperarti in quel contesto. Qui se ne vedrà il comportamento e le leggi fondamentali attraverso la soluzione di problematiche che riproducono, seppure in maniera semplificata, delle applicazioni pratiche.

Rivedere le lezioni di Fisica

Problema 11.1 – Si immagini di avere un “solenoido toroidale” ossia un circuito costituito da N spire identiche disposte uniformemente su un supporto (reale o immaginario) di forma toroidale (come un salvagente). Nello specifico immaginiamo che il solenoide sia formato da $N=100$ spire di rame (sezione del conduttore 1 mm^2), avvolte su un nucleo di cartone di sezione circolare $S=1\text{ cm}^2$; il raggio medio r_o del toro sia di 80 mm . Tale bipolo (componente con due terminali indicato con L in figura) è connesso in serie ad un resistore di resistenza $R = 1\ \Omega$. Nella figura sottostante a sinistra si vede una rappresentazione esemplificativa somigliante alla struttura in questione². La serie dei due componenti è connessa ad un circuito costituito da un deviatore, un cortocircuito e un generatore di tensione di fem $E = 24\text{ V}$. Il deviatore è sempre stato in posizione 0 per $t < 0$ e nell’istante $t=0$ viene commutato in posizione 1. Si chiede di calcolare l’andamento della corrente $i(t)$ e di svolgere un bilancio energetico per $t > 0$.



Per $t < 0$ il solenoide, in serie con il resistore, non è mai stato alimentato e quindi certamente $i(t)=0$.

In $t=0$ il deviatore viene commutato in 1 e così si forma una maglia formata dal generatore di tensione, il resistore e il solenoide che potrà senz’altro essere sede di corrente. Tale maglia avrà una resistenza complessiva pari a R sommata alla resistenza del generatore di tensione che, essendo ideale, è nulla e a quella propria del solenoide. Se stimiamo quest’ultima sulla base dei dati geometrici e fisici del solenoide e dell’avvolgimento troviamo che, in questo caso, è molto inferiore alla R esterna. Assumiamo allora che la totale resistenza equivalente del circuito (maglia) sia R .

² I colori del codice colore del resistore sono: marrone-nero-oro-oro. Qual è la tolleranza sul suo valore?

Per quanto riguarda il solenoide vediamo se e quale tensione si manifesta ai suoi terminali al passaggio della corrente $i(t)$ pur avendo esso resistenza nulla. Sappiamo che tensioni si possono generare in un circuito chiuso in presenza di campi magnetici. Allora dobbiamo, prima di tutto, comprendere quale campo magnetico si possa instaurare a causa dell'unica corrente $i(t)$ presente per $t > 0$. Le linee di campo devono necessariamente concatenare (girare attorno) ad una corrente: lo richiede la legge di circuitazione. Poi, possiamo assumere che le linee di campo magnetico rispettino le simmetrie geometriche della struttura. In definitiva è ragionevole immaginare delle linee di campo come quelle in rosso nella figura che percorrono circolarmente il toro, con verso coerente con quello positivo assunto per la corrente nelle spire, secondo la regola della vite destrorsa che avanza nel toro girando nel verso positivo assegnato alle spire.

Prendiamo per esempio la linea (circonferenza) disposta sul raggio medio r_0 e applichiamo ad essa la legge di circuitazione, tenendo conto che lungo tutto il suo sviluppo avremo un campo magnetico sempre della stessa intensità e sempre con direzione tangenziale alla circonferenza stessa (per ragioni di simmetria). Allora:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H dl = H l = H 2\pi r_0 = Ni$$

Notiamo che la corrente concatenata è pari a N volte la corrente di ciascuna spira (*se volessimo estrarre dalla figura la circonferenza di raggio r_0 dovremmo tagliare N volte la corrente i ; questo è un modo per riconoscere la corrente concatenata con una linea chiusa*).

L'integrale sopra calcolato lo possiamo ritenere valido per qualsiasi altra circonferenza entro il toro, con differente raggio, se i raggi massimo e minimo sono poco diversi da r_0 , cioè se le dimensioni della sezione del toro sono piccole rispetto al raggio medio del toro stesso (toro snello). Se è così, allora per ogni punto appartenente ad una qualsiasi sezione trasversale del nostro solenoide toroidale possiamo ritenere di avere un campo magnetico H ed un campo di induzione magnetica B ortogonali alla sezione stessa e di intensità

$$H = \frac{Ni}{2\pi r_0} \quad \text{campo magnetico entro un solenoide toroidale snello}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r_0} \quad \text{induzione magnetica entro un solenoide toroidale snello (nel vuoto)}$$

Notiamo che per passare da H a B abbiamo moltiplicato per la permeabilità magnetica μ_0 del vuoto perché aria o cartone si comportano magneticamente come il vuoto.

Si possono presumere anche altre linee di campo magnetico come quelle tratteggiate in figura, ma ciascuna di esse concatena una sola volta la corrente i e pertanto l'intensità del campo lungo di esse (anche se non uniforme) sarà molto minore in confronto a quello precedentemente calcolato se N è sufficientemente grande. Assumiamo allora che, ad esclusione del volume entro il toro, il campo magnetico sia assente ovunque.

Il principio di Kirchhoff per le tensioni della maglia ci porta a scrivere

$$E = v_R(t) + v_L(t)$$

ove $v_R(t) = R i(t)$, con la convenzione di segno degli utilizzatori (morsetto positivo coincidente con quello ove la corrente positiva entra convenzionalmente nel componente).

La $v_L(t)$ invece sarà dovuta alle variazioni del flusso magnetico concatenato (rivedere Capitolo 10) con il circuito chiuso rappresentato dal solenoide (i cui morsetti vanno pensati ravvicinati), flusso dovuto alla corrente i stessa. Lo possiamo calcolare integrando l'induzione magnetica B su una superficie il cui contorno sia il solenoide.

La superficie S_ϕ che si appoggia sul circuito del solenoide (contornata dal circuito del solenoide) è una superficie elicoidale (come una scala a chiocciola o la superficie del rotore di un tritacarne). Se le spire sono numerose e ravvicinate, questa superficie è approssimabile con N dischetti ciascuno di sezione pari a quella contornata da una spira, cioè la sezione S del toro. La superficie sarà orientata coerentemente all'orientazione fissata per il suo contorno, cioè per la corrente: sarà attraversata in verso positivo dal verso positivo delle linee di B . Allora il flusso concatenato sarà, tenendo conto che le linee di B sono ortogonali alla superficie e B è uniforme su tutta la superficie:

$$\Phi_c = \int_{S_\phi} \vec{B} \cdot \vec{n} dS_\phi = \int_{S_\phi} B dS_\phi = B \int_{S_\phi} dS_\phi = B S_\phi = B N S = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r_o} N S = \left(\frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r_o} \right) i = L i$$

ove L è un coefficiente che lega il flusso concatenato dal circuito dovuto alla (sola) corrente i con la corrente i stessa. Esso prende il nome di *coefficiente di autoinduzione* o *autoinduttanza* o semplicemente *induttanza* e per il solenoide toroidale è dato dalla

$$L = \frac{\Phi_c}{i} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r_o}$$

Possiamo riconoscere che esso si esprime in weber/ampere [Wb/A] pari anche a [Vs/A]=[Ωs] unità di misura a cui si è dato il nome di henry [H], come già visto (Capitolo 10). *Il bipolo che presenta un'induttanza L è detto induttore.* La figura precedente a destra mostra uno dei simboli comunemente adottati per rappresentare un induttore di induttanza L (l'alternativa frequente è un rettangolo nero pieno).

Per il nostro problema troviamo

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r_o} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \cdot (1 \cdot 10^{-4})_{[m^2]}}{2\pi \cdot (0.08)_{[m]}} = 2.5 \cdot 10^{-6} H \equiv 2.5 \mu H$$

Dobbiamo qui ricordare che l'espressione

$$L = \frac{\Phi_c(i)}{i}$$

è la definizione generale di induttanza di un circuito: l'induttanza è il rapporto fra il flusso concatenato dal circuito, dovuto alla sola corrente che percorre il circuito, e la corrente stessa.

Se la corrente è variabile nel tempo, anche il flusso concatenato lo sarà e allora troveremo nel circuito una forza elettromotrice indotta:

$$e_i = - \frac{d\Phi_c}{dt}$$

che agisce nel verso positivo stabilito per il circuito, cioè a favore della corrente positiva i , come la fem esterna E . Si dovrà allora scrivere:

$$E + e_i = Ri$$

ovvero, ricordando il bilancio delle tensioni già espresso,

$$E = v_R(t) + v_L(t) = Ri - e_i$$

da cui

$$v_L = - e_i = \frac{d\Phi_c}{dt}$$

che porta a:

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{equazione di un induttore ideale (privo di } R \text{ e con } L = \text{costante)}$$

Quest'ultima equazione la possiamo anche invertire, integrando i suoi due membri a destra e a sinistra e ricordando che $i(t) = \Phi_c(t)/L$:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v_L(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt$$

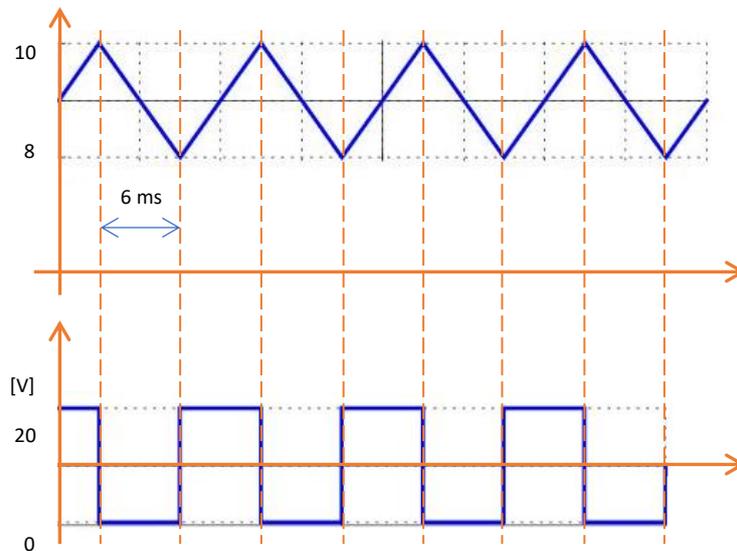
ove, per generalità, consideriamo anche il caso in cui ci possa essere corrente diversa da zero anche per $t < 0$ e quindi l'integrale parte da $t = -\infty$, istante nel quale "è iniziato il funzionamento dell'induttore". L'integrale è stato poi spezzato da $-\infty$ a 0 , per calcolare la $i(0)$, e da 0 a t per valutare il successivo incremento della corrente.

Meritano alcune osservazioni che possiamo ricavare da quanto scritto:

- a. La relazione che dà la *tensione in funzione della corrente* in un induttore non è una relazione algebrica (come era nel resistore), ma differenziale. La tensione in un dato istante non è legata alla corrente in quell'istante, ma a come sta variando la corrente in quell'istante, ossia alla derivata della corrente. Possiamo avere istanti con correnti elevate, ma tensioni perfino nulle e, viceversa, altri con correnti piccole, ma tensioni elevate.



- b. Per esemplificare quanto detto, consideriamo il caso di un induttore con induttanza pari a 30 mH (millihenry $\equiv 10^{-3}$ H) sottoposto ad una corrente avente la forma d'onda mostrata nella figura seguente.



- La corrente ha un andamento triangolare fra 6 A e 10 A (valore medio 8 A) con periodicità di $6+6 = 12$ ms.
- La tensione segue l'andamento della derivata della corrente: è positiva dove la corrente è crescente e negativa dove è calante. Il valore positivo della tensione è pari a

$$v = L (di/dt) = L (\Delta i/\Delta t) = 30 \cdot 10^{-3} ((10-6) / 6 \cdot 10^{-3}) = 20 \text{ V}$$
- Il valore negativo (che si ha anche se la corrente è sempre positiva) è uguale e contrario (come la derivata della corrente).
- Nessuna influenza ha il valore medio della corrente sulla tensione.

- c. Vogliamo evidenziare un particolare risultato che emerge dalle equazioni dell'induttore: quando la corrente di un induttore è costante (quindi per esempio quando è inserito in un circuito che funziona in regime stazionario (in corrente continua)) la tensione è nulla, qualsiasi sia la corrente che lo percorre: *un induttore in un circuito in corrente continua si comporta come un corto circuito ideale (un interruttore ideale chiuso).*
- d. La relazione che dà la *corrente* (così anche il flusso concatenato, proporzionale alla corrente) *in funzione della tensione* in un induttore non è una relazione algebrica (come era nel resistore), ma integrale. La corrente in un dato istante non è legata alla tensione in quell'istante, ma a tutto l'andamento della tensione da $-\infty$ fino all'istante t in esame. Diciamo per questo che l'induttore è un componente con memoria.
- e. Possiamo dedurre anche un'altra proprietà importante del funzionamento di un induttore. Ci vengono in aiuto gli andamenti di tensione e corrente precedentemente usati come esempio. Notiamo che la tensione può avere delle discontinuità (variazioni a gradino) e ciò succede ogniqualvolta la corrente

cambia d'improvviso la sua pendenza (la sua derivata). Invece, *la corrente dell'induttore non ha discontinuità (variazioni a gradino)*. Per avere una discontinuità di corrente, (derivata infinita) si deve avere una tensione elettrica di intensità infinita che nella pratica non si può mai avere. L'induttanza di un induttore ha un effetto "inerziale" (volano) sulla corrente: evita le discontinuità e ostacola le rapide variazioni, che richiederebbero elevate tensioni. Così l'induttore è usato a volte come elemento per "livellare (spianare)" la corrente a fronte di una tensione anche molto variabile.

Possiamo finalmente scrivere tutti i termini dell'equazione di bilancio delle tensioni del circuito del nostro problema in funzione della corrente ottenendo, dopo averla ordinata:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = E$$

che, se la risolviamo, ci fornisce la corrente $i(t)$ cercata.

Come noto dalla Matematica e già visto nel Capitolo 7, la soluzione si compone di due contributi:

$$i(t) = i_p(t) + i_o(t)$$

dove $i_p(t)$ è la soluzione particolare (una qualsiasi funzione del tempo che sia soluzione dell'equazione data, col suo termine noto), mentre $i_o(t)$ è la soluzione dell'omogenea (soluzione dell'equazione data, resa omogenea ponendo a zero il termine noto).

Visto che il termine noto è una costante (pari a E), una soluzione particolare facilmente individuabile è una corrente costante $i(t) = I$ (derivata nulla) che sostituita nell'equazione porta a:

$$R I = E$$

cioè

$$I = \frac{E}{R}$$

Per trovare invece la soluzione dell'omogenea occorre scrivere prima *l'equazione algebrica caratteristica associata* che è:

$$L \cdot s + R = 0$$

e trovarne la radice

$$s = -\frac{R}{L}$$

che ci consente di scrivere la *soluzione generale dell'omogenea* nella forma

$$i_o(t) = A e^{+st} = A e^{-t/\tau}$$

In questa si è posto $\tau = L/R$ che dimensionalmente è un tempo e che prende il nome di *costante di tempo della maglia (circuito) RL*. Per il nostro problema:

$$\tau = L/R = 2.5 \cdot 10^{-6} / 1 = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 2.5 \text{ } \mu\text{s}$$

La costante A, che dimensionalmente è una corrente, la calcoliamo imponendo le condizioni iniziali e cioè che il valore iniziale $i(0)$ della soluzione trovata corrisponda al valore della corrente in $t=0$ del nostro caso specifico. La corrente di un induttore non può avere discontinuità (cioè una derivata infinita) perché ciò richiederebbe una tensione infinita ed essendo noto che la corrente del nostro induttore è nulla prima della commutazione del deviatore, lo sarà anche subito dopo e il valore iniziale sarà quindi $i(0)=0$:

$$i(0) = i_p(0) + i_o(0) = (I + A e^{-t/\tau})_{t=0} = I + A = 0$$

dalla quale ricaviamo che deve essere $A=-I$ il che ci consente di scrivere che la corrente sul nostro induttore per $t>0$ sarà espressa dalla:

$$i(t) = I + A e^{-t/\tau} = I + (-I) e^{-t/\tau}$$

ossia in definitiva

$$i(t) = I (1 - e^{-t/\tau}) \text{ corrente di carica di un } L \text{ attraverso } E - R \text{ costanti}$$

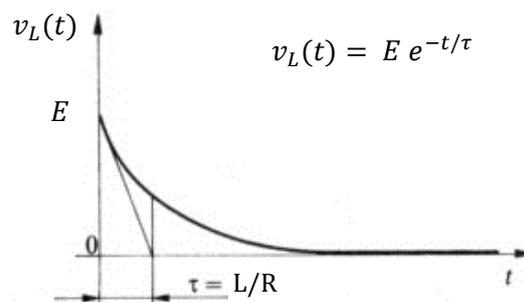
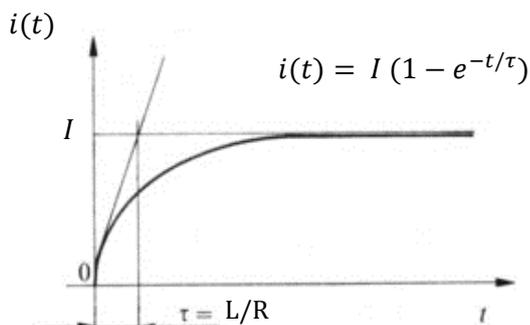
Notiamo che la corrente parte da zero per $t=0$ e poi cresce dapprima velocemente e poi più lentamente per tendere, asintoticamente, al valore $i(\infty) = I$. Il processo studiato è la *carica di un induttore attraverso un circuito E-R (che potrebbe essere la schematizzazione di un generatore reale di tensione)*. Il valore $i(\infty) = I = E/R$ è la *corrente finale dell'induttore*. Il *flusso concatenato finale dell'induttore* sarà $\Phi_c(\infty) = \Phi_c = Li(\infty) = LI$.

Ne consegue che la tensione $v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ diventa

$$v_L(t) = L (-I) \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau} \text{ tensione durante la carica di un } L \text{ attraverso } E - R$$

Notiamo che in $t=0$ la tensione passa istantaneamente da zero a $v_L(0) = V_o = E$ per poi decrescere esponenzialmente, dapprima velocemente e poi più lentamente per raggiungere, asintoticamente, il valore $v_L(\infty) = 0$, che è la *tensione finale a regime sull'induttore (a regime siamo in "corrente continua" ove un induttore si comporta come un corto circuito)*.

La figura che segue mostra gli andamenti della corrente e della tensione dell'induttore per $t>0$.

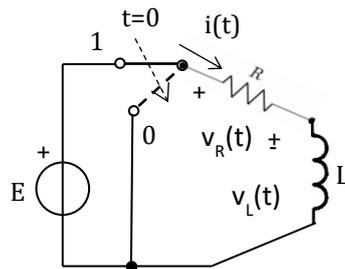


Vediamo di svolgere un *bilancio energetico* durante il processo di carica dell'induttore. L'energia assorbita dall'induttore la calcoliamo integrando la potenza assorbita (potenza calcolata con la convenzione di segno degli utilizzatori) da $t=0$ a $t= \infty$. Risulta:

$$W_L = \int_0^{\infty} v_L(t) \cdot i(t) dt = \int_0^{\infty} \left(L \frac{di(t)}{dt} \right) i(t) dt = L \int_{i(0)}^{i(\infty)} i \cdot di = \frac{1}{2} Li^2 (\infty) = \frac{1}{2} LI^2$$

Vedremo a breve, che l'energia assorbita dall'induttore (ideale, cioè privo di resistenze interne) è da esso accumulata e può essere restituita mediante una scarica dell'induttore stesso. L'induttore è un elemento conservativo, capace di accumulare energia e di restituirla.

Per completare lo studio dell'induttore, vediamo ora il *processo di scarica*. Supponiamo che il processo di carica, precedentemente visto, sia avvenuto per $t < 0$ (con il deviatore in posizione 1 da $t = -\infty$ a $t=0$) e l'induttore sia quindi perfettamente carico in $t=0$. Allora avremo $i(0)=I_0=E/R$. Nell'istante $t=0$ il deviatore viene commutato in posizione 0 per scaricare l'induttore. La situazione di scarica è illustrata nella figura che segue. Manteniamo gli stessi versi positivi per tensioni e correnti già adottati per lo studio della carica.



Il bilancio delle tensioni nella maglia RL che si viene a creare per $t > 0$ è simile al precedente già visto, salvo che non è coinvolta la fem E. Allora esso è espresso dalla:

$$v_R(t) + v_L(t) = 0$$

che diventa, seguendo lo stesso procedimento di prima:

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = 0$$

che è l'equazione differenziale (lineare, del primo ordine), omogena in questo caso, che descrive la dinamica (il transitorio) della scarica dell'induttore sulla resistenza R per $t > 0$ e la cui soluzione ci dà l'andamento nel tempo della corrente nell'induttore per $t > 0$.

In questo caso non c'è integrale particolare e la soluzione è allora solo la soluzione dell'omogenea

$$i(t) = A e^{+st} = A e^{-t/\tau}$$

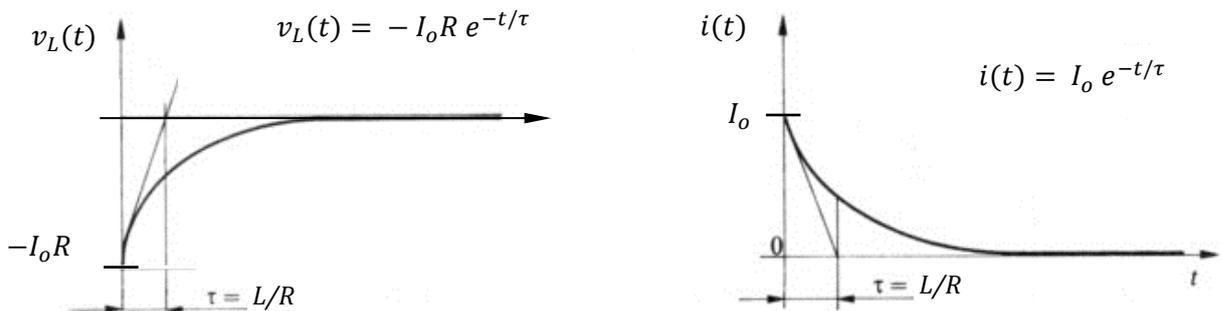
con $\tau=L/R$. L'imposizione delle condizioni iniziali, ossia che $i(0)=I_0=E/R$ ci porta a fissare $A= I_0$ sicché la corrente è in definitiva:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \text{ corrente di scarica di un induttore } L \text{ su una resistenza } R$$

Derivando l'espressione della corrente e moltiplicando per L otteniamo la tensione

$$v_L(t) = -I_0 R e^{-t/\tau} \text{ tensione durante la scarica di un induttore } L \text{ su una resistenza } R$$

Gli andamenti della tensione e della corrente sono tracciati nella figura seguente.



Anche in questo caso possiamo svolgere il *bilancio energetico del processo di scarica*. Visto che tensione e corrente dell'induttore sono stati calcolati con la convenzione di segno degli utilizzatori, il loro prodotto dà la potenza assorbita e l'integrale di questa da $t=0$ a $t=\infty$ è l'energia assorbita dall'induttore. Allora

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = -RI_0^2 (e^{-t/\tau})^2$$

che è sempre negativa, come necessariamente deve essere perché la potenza assorbita dal resistore sarà necessariamente positiva ($p=RI^2$) e la somma delle potenze, tutte assorbite essendo tutti i bipoli orientati con la convenzione di segno degli utilizzatori, deve essere zero. In termini comprensibili si può dire che l'induttore L assorbe una potenza negativa, quindi di fatto eroga una potenza positiva uguale e contraria e il resistore assorbe e dissipa, istante per istante, la stessa potenza.

Integrando la potenza dell'induttore abbiamo (si ricorda che ora è $i(0)=I_0=I=E/R$, $i(\infty)=0$) :

$$W_L = \int_0^\infty v_L(t) \cdot i(t) dt = \int_0^\infty (L \frac{di(t)}{dt}) i(t) dt = L \int_{i(0)}^{i(\infty)} i \cdot di = -\frac{1}{2} Li^2(0) = -\frac{1}{2} LI^2$$

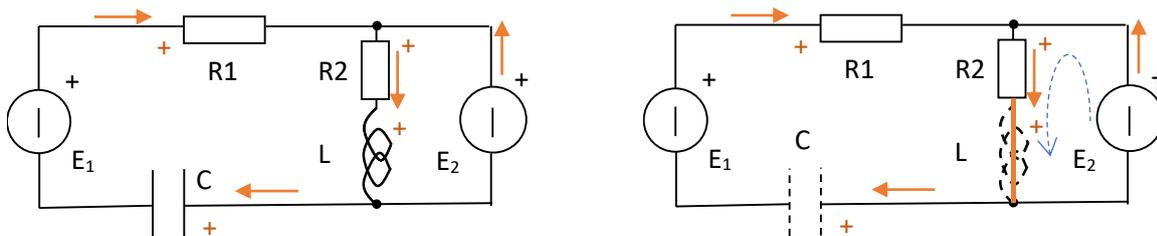
cioè una energia assorbita (assorbita perché è stata calcolata con la convenzione di segno degli utilizzatori) negativa. Il suo valore cambiato di segno è l'energia erogata ed è proprio pari a quella assorbita durante la fase di carica, precedentemente calcolata. Ciò prova quanto affermato che *l'induttore è un componente conservativo: il lavoro elettrico che assorbe in certe fasi di funzionamento lo conserva come energia accumulata e lo rende, se richiesto, in altre fasi*. Se $i_c(t)$ è la corrente in un certo istante t e L è l'induttanza dell'induttore e $\Phi_c(t)$ il suo flusso concatenato, allora l'energia accumulata in quell'istante vale:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li_L^2(t) = \frac{1}{2} \phi_c(t) i_L(t) = \frac{1}{2} \frac{\phi_c^2(t)}{L} \quad \text{energia accumulata in un induttore}$$

che dipende solo dai valori della corrente o del flusso concatenato nell'istante t , indipendentemente da come si sia arrivati a quei valori.

Problema 11.2: E' dato il circuito di figura sotto a sinistra in corrente continua con $R1 = 20 \Omega$, $R2 = 40 \Omega$, $C = 30 \mu F$, $L = 5 mH$. I generatori ideali di tensione hanno fem $E1 = 20 V$ ed $E2 = 80 V$. Calcolare

- a. le potenze assorbite da $R1$, $R2$, L , e C
- b. le potenze erogate P_{E1} e P_{E2} dai generatori
- c. le energie accumulate in L e C .



Fissiamo prima di tutto i versi positivi delle tensioni e delle correnti, a piacere, ma avendo l'accortezza di adottare (non obbligatorio, solo comodo) la convenzione di segno dei generatori per i due generatori ideali e quella degli utilizzatori per tutti gli altri bipoli. I versi positivi sono indicati in figura con le frecce colorate (correnti) e il morsetto positivo (tensioni).

Abbiamo poi dedotto che i condensatori in corrente continua (tensioni costanti) si comportano come circuiti ideali aperti, mentre gli induttori in corrente continua (correnti costanti) si comportano come corto circuiti ideali. Per lo studio della rete in corrente continua si può allora fare riferimento a quella di destra.

Si riconosce che esiste una sola maglia chiusa che può essere sede di corrente e pertanto

$$I_C = I_{E1} = I_{R1} = 0 \text{ A}$$

$$V_{R2} + V_L = E_2 = 80 \text{ V} \quad (\text{eq. maglia di destra})$$

$$\text{ma } V_L = 0 \quad \text{sicché } V_{R2} = E_2 = 80 \text{ V}$$

$$\text{quindi } I_L = I_{E2} = I_{R2} = V_{R2}/R2 = 80/40 = 2 \text{ A}$$

$$E_1 - V_{R1} - V_{R2} - V_L - V_C = 0 \quad (\text{eq. maglia di sinistra})$$

$$\text{ma anche } V_{R1} = I_{R1} R_1 = 0$$

$$\text{quindi } V_C = E_1 - V_{R2} = E_1 - E_2 = 20 - 80 = -60 \text{ V}$$

Sono così note le tensioni e le correnti di tutti i bipoli del circuito.

Per ciascuno, il prodotto tensione per corrente fornisce la potenza, assorbita se tensione e corrente sono orientati in coerenza con la convenzione di segno degli utilizzatori, erogata se tensione e corrente sono orientati in coerenza con la convenzione di segno dei generatori.

$$P_{R1} = V_{R1} I_{R1} = 0 \text{ W (assorbita)}$$

$$P_{R2} = V_{R2} I_{R2} = 80 \cdot 2 = 160 \text{ W (assorbita)}$$

$$P_L = V_L I_L = 0 \text{ W (assorbita)}$$

$$P_C = V_C I_C = 0 \text{ W (assorbita)}$$

$$P_{E1} = E_1 I_{E1} = 0 \text{ W (erogata)}$$

$$P_{E2} = E_2 I_{E2} = 80 \cdot 2 = 160 \text{ W (erogata)}$$

Come deve essere, la somma delle potenze assorbite è pari alla somma di quelle erogate.

Per le energie accumulate abbiamo facilmente:

$$W_L = (1/2) L (I_L)^2 = 0.5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 = 0.010 \text{ J}$$

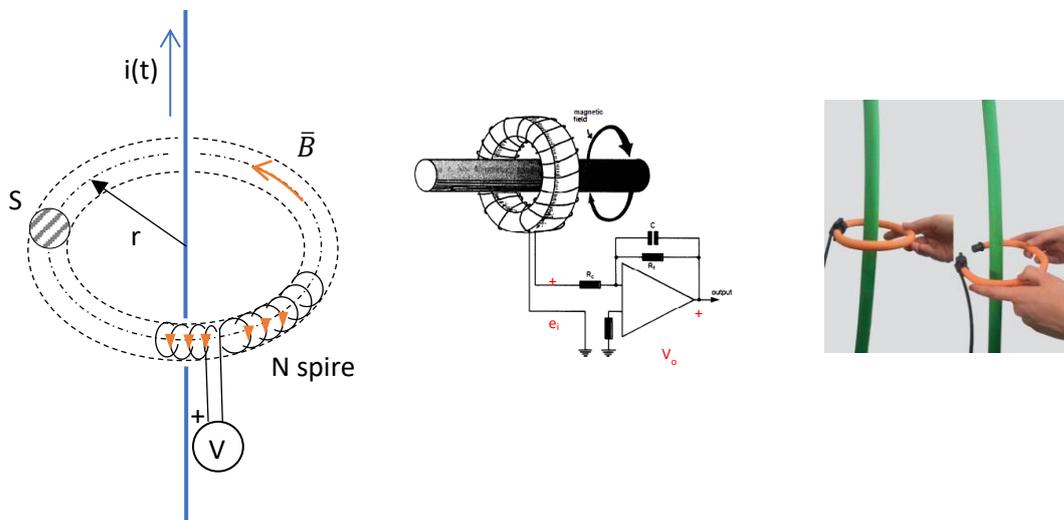
$$W_C = (1/2) C (V_C)^2 = 0.5 \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot (-60)^2 = 0.054 \text{ J}$$

NB – Le energie accumulate sono costanti (come le correnti e le tensioni) quindi giustamente le potenze assorbite da L e C sono nulle.

Capitolo 12

Mutuo Induttore, Mutua Induttanza

Problema 12.1 – Si immagini di avere conduttore percorso dalla corrente $i(t)$ che si intende misurare (figura sotto a sinistra). Attorno a tale conduttore si disponga un “solenoidale toroidale” ossia un circuito costituito da N spire identiche disposte uniformemente su un supporto di materiale plastico di forma toroidale. Nello specifico immaginiamo che il solenoide sia formato da $N=1000$ spire di rame, avvolte su un supporto di sezione circolare $S=1\text{ cm}^2$; il raggio medio r del toro sia di 10 cm . I terminali del solenoide sono collegati ai morsetti di un voltmetro V ideale. Vogliamo studiare l’indicazione del voltmetro.



Questo problema ci consente di incontrare per la prima volta e di definire il **coefficiente di mutua induttanza**. Per fare uno studio corretto, fissiamo dapprima i versi positivi delle grandezze che ci interessano. E’ fissato dal problema il verso positivo della corrente $i(t)$. Di conseguenza, secondo la regola della vite destrorsa che ruota avanzando nel verso della corrente, risulta definito il verso positivo delle linee circolari di B e di H (in figura in colore).

Assumiamo ora per semplicità (poi rimuoveremo questa ipotesi) che l’avvolgimento solenoidale sia disposto lungo una linea di campo magnetico. Quindi il toro è circolare e concentrico con il conduttore che porta la corrente. Orientiamo il verso di percorrenza delle spire del solenoide secondo la regola della vite destrorsa che ruotando in tale verso avanza secondo il verso positivo di B (ancora in colore).

Con queste scelte coordinate di versi positivi e per le ipotesi semplificativa fatte, possiamo scrivere che entro il solenoide (che è snello) c’è un’induzione magnetica di intensità uniforme in tutto il suo volume interno³ e di direzione ortogonale al piano di ciascuna spira. La sua intensità sappiamo che vale:

³ Si trascura la differenza di raggio massimo e minimo del solenoide assumendo sempre il raggio medio r (assunzione di solenoide snello)

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

Il flusso magnetico che attraversa una singola spira, ovvero che attraversa la sezione S (flusso concatenato con una spira, ovvero flusso del tubo di flusso costituito dal toro) è:

$$\phi_S = BS = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} S$$

Il flusso concatenato con l'intero solenoide è invece

$$\phi_c = N\phi_S = N \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} S = \frac{\mu_0 NS}{2\pi r} i = M i$$

ove il coefficiente M è detto *coefficiente di mutua induttanza, o semplicemente mutua induttanza, fra il conduttore percorso dalla corrente i(t) e il circuito solenoidale di N spire. Notiamo che questo coefficiente (che è fisico-geometrico) lega la corrente di un circuito (l'unica che c'è) con il flusso concatenato da l'altro circuito, privo di corrente (per questo motivo di usa l'attributo "mutua")*. Con il prossimo Problema approfondiremo e perfezioneremo questa definizione.

Se la corrente i(t) è variabile nel tempo, lo è anche il flusso concatenato e, quindi, nel solenoide è indotta una forza elettromotrice

$$e_i(t) = -\frac{d\phi_c}{dt} = -M \frac{di(t)}{dt} = v_v(t)$$

che, visti i versi positivi stabiliti o scelti, è proprio la tensione $v_v(t)$ misurata dal voltmetro⁴. La misura (o registrazione) della tensione del voltmetro e successiva integrazione nel tempo consente pertanto di risalire alla corrente i(t):

$$i(t) = -\frac{1}{M} \int_0^t v_v(t) dt$$

Questa operazione può essere fatta con mezzi numerici oppure analogici come esemplificato nella figura centrale sopra mostrata ove la tensione $v_o(t)$ è legata all'integrale di $e_i(t)$.

Notare che riusciamo a misurare la corrente senza interrompere, neanche toccare, il conduttore ove essa scorre, che potrebbe essere anche in alta tensione o non essere solido (plasma ionizzato) o altre situazioni critiche ancora. Naturalmente la corrente deve essere variabile nel tempo altrimenti la sua derivata sarebbe nulla (o molto piccola) e così pure la fem indotta ovvero la tensione di misura (non funzione con correnti continue).

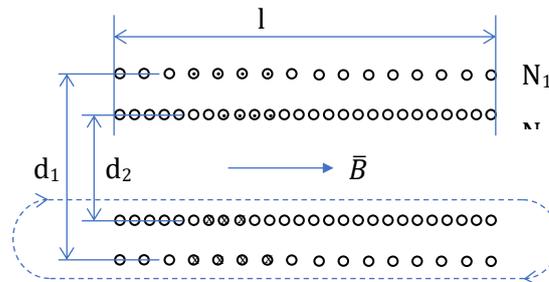
Quest'apparecchiatura prende il nome di "bobina di Rogowski" e la figura sopra a destra ne mostra l'aspetto fisico e il modo di installazione. Occorre qui ricordare che il risultato ottenuto si dimostra essere valido anche se la bobina non è disposta su una circonferenza concentrica con la corrente, è sufficiente che

⁴ Se si volesse far sparire il segno meno che lega la tensione misurata alla derivata della corrente, basterebbe invertire i morsetti dello strumento.

sia disposta attorno alla corrente, anche non su un piano ortogonale al conduttore. Il coefficiente M , che dipende da soli parametri fisici e geometrici rimane immutato.

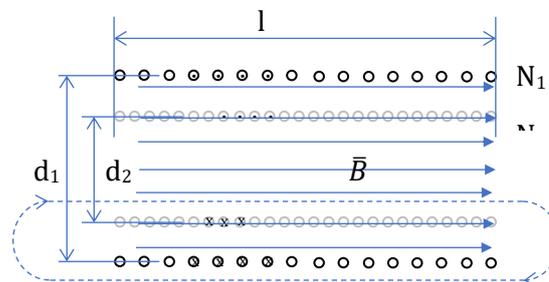
Problema 12.2 – Si consideri un solenoide rettilineo in aria di N_1 spire uniformemente distribuite su una lunghezza l e un diametro d_1 , con $l \gg d_1$ (solenoido lungo); concentrico ed interno ad esso ci sia un secondo solenoide rettilineo, della stessa lunghezza l , di N_2 spire e di diametro d_2 . Immaginiamo trascurabili gli ingombri (spessori) delle spire. Le spire dei due solenoidi siano orientate con versi positivi tali che correnti positive producono campi magnetici concordi orientati verso destra in figura (l'orientamento delle spire è indicato, in alcune, con (x) (verso positivo entrante nel piano della figura) e con (\cdot) (verso positivo uscente nel piano della figura)).

Vogliamo calcolare per i due circuiti i coefficienti di auto e mutua induttanza.



L'autoinduttanza L_1 del circuito 1 è per definizione pari al rapporto fra il flusso concatenato dall'avvolgimento 1, dovuto alla sola corrente dell'avvolgimento 1, e la corrente dell'avvolgimento 1 stessa. In questa valutazione quindi la corrente dell'avvolgimento 2 è assunta nulla.

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}(i_1)}{i_1} \right|_{i_2=0}$$



La situazione è rappresentata nella figura sopra. Se il solenoide è lungo, il campo magnetico al suo interno è uniforme, nella lunghezza e sul diametro, come riportato con le linee di campo disegnate in figura. All'esterno del solenoide le linee di campo (sia di B che di H) si aprono rapidamente ad ombrello per richiudersi sull'altra estremità dopo aver invaso tutto lo spazio. Il campo magnetico all'esterno del

solenoidi lungo è pertanto molto più debole che entro il solenoide e lo possiamo ritenere approssimativamente nullo.

La legge di circuitazione lungo una linea di campo diventa quindi:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \cong \int_l H dl = H_1(i_1) \cdot l = N_1 i_1$$

cioè abbiamo che il campo magnetico H entro il solenoide 1 dovuto alla sola corrente i_1 è pari a:

$$H_1(i_1) = \frac{N_1 i_1}{l}$$

e di conseguenza

$$B_1(i_1) = \mu_o \frac{N_1 i_1}{l}$$

Allora il flusso concatenato in questa situazione sarà:

$$\Phi_{c1}(i_1) = B_1(i_1) \left(\frac{\pi d_1^2}{4}\right) N_1 = \mu_o \frac{N_1^2 \pi d_1^2}{4l} i_1$$

Infine, l'autoinduttanza dell'avvolgimento 1 diventa:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}(i_1)}{i_1} \right|_{i_2=0} = \mu_o \frac{N_1^2 \pi d_1^2}{4l} \quad \text{autoinduttanza di un solenoide lungo}$$

Siccome i versi positivi della corrente, dell'induzione magnetica e della sezione su cui si calcola il flusso concatenato sono stati scelti in modo coordinato, correnti positive producono flussi concatenati positivi (e correnti negative flussi negativi). Ne risulta che l'autoinduttanza di un circuito (per esempio L_1) è sempre positiva.

La mutua induttanza fra il circuito 1 e il circuito 2 è per definizione pari al rapporto fra il flusso concatenato dall'avvolgimento 2, dovuto alla sola corrente dell'avvolgimento 1, e la corrente dell'avvolgimento 1 stessa. In questa valutazione quindi la corrente dell'avvolgimento 2 è assunta nulla.

$$M_{21} = \left. \frac{\Phi_{c2}(i_1)}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

Nel volume interno al circuito 2 c'è il campo di induzione magnetica B prima calcolato (vedi figura).

Allora il flusso concatenato dall'avvolgimento 2 (che ha sezione interna più piccola di quella dell'avvolgimento 1) in questa situazione sarà:

$$\Phi_{c2}(i_1) = B_1(i_1) \left(\frac{\pi d_2^2}{4}\right) N_2 = \mu_o \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4l} i_1$$

Pertanto, la mutua induttanza dell'avvolgimento 1 diventa:

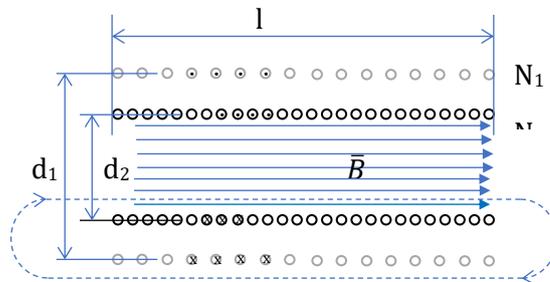
$$M_{21} = \left. \frac{\Phi_{c2}(i_1)}{i_1} \right|_{i_2=0} = \mu_o \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4l} \quad \text{mutua induttanza fra due solenoidi lunghi concentrici}$$

Avendo scelto per i due circuiti versi positivi tali da produrre, con correnti positive, campi magnetici concordi, la mutua induttanza risulta positiva. Invertendo il verso positivo di uno dei due circuiti, una corrente positiva in esso produrrebbe un flusso concatenato negativo nell'altro e pertanto un coefficiente di mutua induttanza negativo (uguale e contrario a quello sopra calcolato).

Ripetiamo considerando il secondo circuito.

L'autoinduttanza L_2 del circuito 2 è per definizione pari al rapporto fra il flusso concatenato dall'avvolgimento 2, dovuto alla sola corrente dell'avvolgimento 2, e la corrente dell'avvolgimento 2 stessa. In questa valutazione quindi la corrente dell'avvolgimento 1 è assunta nulla.

$$L_2 = \frac{\Phi_{c2}(i_2)}{i_2} \Big|_{i_1=0}$$



La situazione è rappresentata nella figura sopra. Se il solenoide 2 è lungo, il campo magnetico al suo interno è uniforme, nella lunghezza e sul diametro. All'esterno del solenoide le linee di campo (sia di B che di H) si aprono rapidamente ad ombrello per richiudersi sull'altra estremità dopo aver invaso tutto lo spazio. Il campo magnetico all'esterno del solenoide lungo è pertanto molto più debole che entro il solenoide e lo possiamo ritenere approssimativamente nullo.

La legge di circuitazione lungo una linea di campo diventa quindi:

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} \cong \int_l H dl = H_2(i_2) \cdot l = N_2 i_2$$

cioè abbiamo che il campo magnetico H entro il solenoide 2 dovuto alla sola corrente i_2 è pari a:

$$H_2(i_2) = \frac{N_2 i_2}{l}$$

e di conseguenza

$$B_2(i_2) = \mu_0 \frac{N_2 i_2}{l}$$

Allora il flusso concatenato in questa situazione sarà:

$$\Phi_{c2}(i_2) = B_2(i_2) \left(\frac{\pi d_2^2}{4} \right) N_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 \pi d_2^2}{4l} i_2$$

Infine, autoinduttanza dell'avvolgimento 2 diventa:

$$L_2 = \left. \frac{\Phi_{c2}(i_2)}{i_2} \right|_{i_1=0} = \mu_0 \frac{N_2^2 \pi d_2^2}{4l} \quad \text{autoinduttanza di un solenoide lungo}$$

formula perfettamente simmetrica a quella dedotta per il circuito 1.

La mutua induttanza fra il circuito 2 e il circuito 1 è per definizione pari al rapporto fra il flusso concatenato dall'avvolgimento 1, dovuto alla sola corrente dell'avvolgimento 2, e la corrente dell'avvolgimento 2 stessa. In questa valutazione quindi la corrente dell'avvolgimento 1 è assunta nulla.

$$M_{12} = \left. \frac{\Phi_{c1}(i_2)}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

Nel volume interno al circuito 1 c'è il campo di induzione magnetica B prima calcolato, ma solo per la porzione di sezione occupata dal solenoide 2 (vedi figura).

Allora il flusso concatenato dall'avvolgimento 1 in questa situazione sarà:

$$\Phi_{c1}(i_2) = B_2(i_2) \left(\frac{\pi d_2^2}{4} \right) N_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4l} i_2$$

Pertanto, la mutua induttanza dell'avvolgimento 1 diventa:

$$M_{12} = \left. \frac{\Phi_{c1}(i_2)}{i_2} \right|_{i_1=0} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi d_2^2}{4l} \quad \text{mutua induttanza fra due solenoidi lunghi concentrici}$$

che troviamo pari a M_{21} . Questa non è una coincidenza, ma una legge generale:

Dati due circuiti mutuamente accoppiati, essi soddisfano sempre al principio di reciprocità cioè

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Inoltre, si può dimostrare che risulta soddisfatta anche la relazione:

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

Se ora immaginiamo che ci siano correnti sia i_1 che i_2 , allora i flussi concatenati saranno, per la sovrapposizione degli effetti

$$\Phi_{c1}(i_1, i_2) = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\Phi_{c2}(i_1, i_2) = M i_1 + L_2 i_2$$

che sono le equazioni costitutive flussi-correnti del doppio bipolo (componente a due coppie di morsetti) detto *mutuo induttore*.

Se le correnti sono variabili nel tempo, lo sono anche i flussi concatenati e quindi, con la convenzione di segno degli utilizzatori, come si è fatto per il bipolo induttore, si scriverà

$$v_1 = \frac{d\phi_{c1}(i_1, i_2)}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\phi_{c2}(i_1, i_2)}{dt}$$

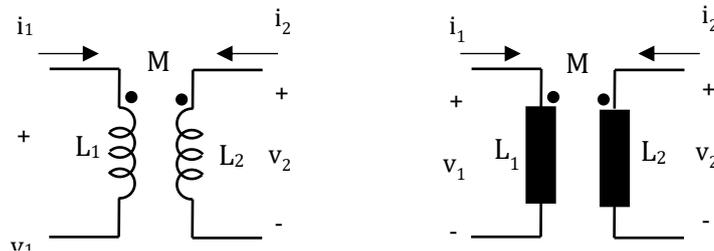
Tenendo conto delle relazioni flussi-correnti infine abbiamo

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{equazioni del mutuo induttore}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \text{convenzione di segno degli utilizzatori}$$

che sono le equazioni costitutive tensioni-correnti del *mutuo induttore*.

Il simbolo circuitale del mutuo induttore è solitamente uno dei due sotto riportati. I morsetti contrassegnati con il puntino stanno ad indicare che se si scelgono versi positivi per le correnti entranti da quei morsetti, il coefficiente di mutua induttanza è quello assegnato (solitamente positivo).



Possiamo svolgere anche un bilancio energetico. Partiamo dalla potenza assorbita dal componente, che avendo due coppie di morsetti sarà, istante per istante:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

Integrandola nel tempo, troviamo il lavoro elettrico assorbito che, per le ipotesi fatte di reciprocità e sui valori delle auto e mutue induttanze, si potrebbe dimostrare è ancora un'energia accumulata:

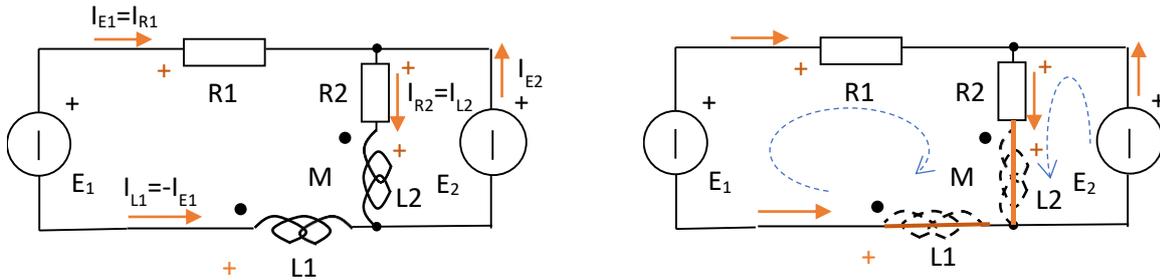
$$W_L = \int_{-\infty}^t (v_1 i_1 + v_2 i_2) dt = \int_{-\infty}^t \left[\left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left(M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2 \right] dt$$

che diventa

$$W_L = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Problema 12.3: E' dato il circuito di figura sotto a sinistra in corrente continua con $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 40 \Omega$, $L_1 = 25 \text{ mH}$, $M = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 5 \text{ mH}$. I generatori ideali di tensione hanno fem $E_1 = 120 \text{ V}$ ed $E_2 = 80 \text{ V}$. Calcolare

- le potenze P_{R1} , P_{R2} e P_M assorbite da R_1 , R_2 e dal mutuo induttore;
- le potenze P_{E1} e P_{E2} erogate dai generatori;
- l'energia accumulata nel mutuo induttore.



Fissiamo prima di tutto i versi positivi delle tensioni e delle correnti, a piacere, ma avendo l'accortezza di adottare (non obbligatorio, solo comodo) la convenzione di segno dei generatori per i due generatori ideali e quella degli utilizzatori per tutti gli altri bipoli. I versi positivi sono indicati in figura con le frecce colorate (correnti) e il morsetto positivo (tensioni).

Abbiamo dedotto che gli induttori in corrente continua (correnti costanti) si comportano come corto circuiti ideali. Per lo studio della rete in corrente continua si può allora fare riferimento a quella di destra.

Si riconosce che esistono due maglie (elementari, anelli) chiuse (quindi si scriveranno due equazioni di bilancio delle tensioni) e due nodi (quindi si scriverà un'equazione di bilancio delle correnti).

$$E_1 - V_{R1} - V_{R2} - V_{L2} + V_{L1} = 0 \quad (\text{eq. maglia di sinistra})$$

$$E_2 - V_{R2} - V_{L2} = 0 \quad (\text{eq. maglia di destra})$$

$$I_{E1} + I_{E2} - I_{R2} = 0 \quad (\text{eq. al nodo (superiore)})$$

Le equazioni ai componenti sono:

$$V_{L1} = V_{L2} = 0$$

$$V_{R2} = I_{R2} R_2$$

$$V_{R1} = I_{R1} R_1$$

che sostituite nelle equazioni superiori consentono di ottenere un sistema di tre equazioni nelle tre incognite I_{E1} , I_{E2} , I_{R2} dalle quali poi si ricavano tutte le altre grandezze di interesse.

La soluzione della rete è:

$$I_{E1} = 2 \text{ A}$$

$$I_{E2} = 0 \text{ A}$$

$$I_{R2} = I_{L2} = 2 \text{ A}$$

$$\text{ed anche } I_{L1} = -I_{E1} = -2 \text{ A}$$

Possiamo calcolare le varie potenze:

$$P_{R1} = R1 I_{R1}^2 = 80 \text{ W (assorbita)}$$

$$P_{R2} = R2 I_{R2}^2 = 160 \text{ W (assorbita)}$$

$$P_{E1} = E1 I_{E1} = 240 \text{ W (erogata)}$$

$$P_{E2} = E2 I_{E2} = 0 \text{ W (erogata)}$$

Per il mutuo induttore la potenza la possiamo calcolare come somma delle potenze assorbite alle sue due coppie di morsetti:

$$P_M = V_{L1} I_{L1} + V_{L2} I_{L2} = 0 \text{ W (assorbita)}$$

Per l'energia accumulata abbiamo facilmente:

$$W_m = (1/2) L1 (I_{L1})^2 + M I_{L1} I_{L2} + (1/2) L2 (I_{L2})^2 = 0.020 \text{ J}$$

NB – L'energia accumulata è costante (come le correnti) quindi giustamente la potenza assorbita dal mutuo induttore è nulla.

Capitolo 13

Materiali magnetici, Circuiti magnetici



Materiali magnetici – Le questioni “magnetiche” fin qui affrontate e i Problemi risolti hanno sempre assunto che i sistemi studiati siano immersi nel vuoto ed hanno ignorato la presenza dei materiali costituenti i sistemi stessi, come se si comportassero, per quanto riguarda i campi magnetici, come il vuoto. Ciò è con buona approssimazione vero per i casi studiati.

L’evidenza sperimentale però ci mostra che i tutti materiali possono essere classificati in tre categorie sulla base del valore della permeabilità magnetica $\mu = B/H$ [H/m] che essi presentano. Come si è fatto per la costante dielettrica, conviene esprimere anche la permeabilità con la forma $\mu = \mu_0 \mu_r$ ove μ_0 è la permeabilità del vuoto ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m = $1.256 \cdot 10^{-6}$ H/m) e μ_r è la permeabilità magnetica relativa del mezzo (adimensionale).

Con riferimento ai valori assunti da μ_r abbiamo le seguenti categorie di materiali magnetici

- **Materiali diamagnetici** (es. il rame, l’argento, il mercurio, l’oro, il bismuto e il carbonio negli stati di diamante o della grafite): $\mu_r < 1$. Da ricordare però che la differenza a 1 della permeabilità magnetica relativa⁵ è dell’ordine di $10^{-5} \div 10^{-6}$ e quindi dal punto di vista pratico è quasi sempre possibile assumere $\mu_r = 1$.
- **Materiali paramagnetici** (es. l’alluminio, il tungsteno, il cesio, il litio, il sodio): $\mu_r > 1$. Ancor più in questo caso dal punto di vista pratico è possibile assumere $\mu_r = 1$.
- **Materiali ferromagnetici** (es. il ferro e molte sue leghe, il cobalto, il nichel): $\mu_r \gg 1$ (i valori possono andare fra 100 e 1000 ma ci sono materiali con permeabilità magnetica relativa che assume valori di diverse migliaia). I materiali ferromagnetici (detti anche semplicemente “magnetici”) si differenziano peraltro dai materiali paramagnetici e diamagnetici (detti anche semplicemente “non magnetici”) non solo per il valore della permeabilità magnetica relativa molto maggiore, ma anche per altri comportamenti fra i quali:
 - La relazione B-H non è lineare, ossia il valore di μ_r varia con B (e con H). In generale diminuisce all’aumentare di B e di H.
 - Sono materiali “con memoria”: una volta sottoposti ad un campo magnetico prodotto da qualche corrente elettrica, una certa frazione del campo magnetico permane anche dopo rimossa la corrente. Questo fenomeno porta alla manifestazione di una relazione “isteretica” (con “ciclo di isteresi”) fra B e H, fatto che è sfruttato nella realizzazione dei materiali magnetici permanenti.

Entrambi questi aspetti saranno oggetto di discussione in seguito. Per il momento ci basta ricordare che i materiali ferromagnetici hanno una permeabilità magnetica (equivalente ad una conducibilità magnetica) assai maggiore di quella dei materiali non magnetici.

⁵ La differenza $\mu_r < 1$ prende il nome di suscettività magnetica.

Circuiti magnetici – Sappiamo che un circuito elettrico è una struttura realizzata con materiali conduttori (materiali con alta conduttività elettrica = bassa resistività elettrica) immerso in materiali isolanti ossia non conduttori (materiali con bassa conduttività elettrica = alta resistività elettrica) in “modo da ottenere la canalizzazione” delle linee di corrente all’interno del circuito (dei materiali conduttori). Ciò si ottiene in modo praticamente perfetto perché il rapporto fra la conduttività elettrica del conduttore = reciproco della resistività (per esempio per il rame $1/\rho = 1/(1.75 \cdot 10^{-8}) \cong 6 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$) e quella degli isolanti (per es. aria $1/\rho = 10^{-15} \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$) è dell’ordine di $10^{20} \div 10^{25}$ sicché la densità di corrente nell’isolante è molto inferiore ad un miliardesimo di miliardesimo di quella che c’è nel circuito conduttore, praticamente nulla.

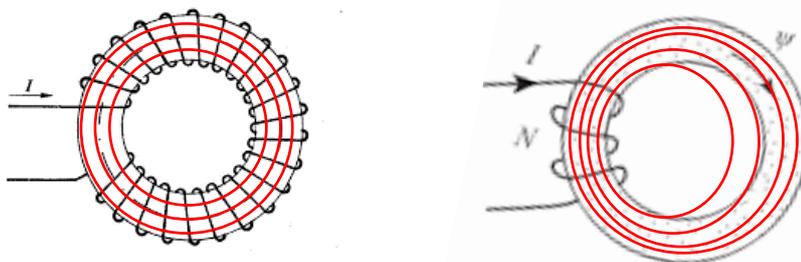
Questo risultato non si può ottenere con i circuiti magnetici! Come abbiamo visto sopra il rapporto fra la permeabilità magnetica dei materiali ferromagnetici (i migliori conduttori magnetici) e quella dei materiali non magnetici (i migliori isolanti magnetici) e compreso fra 100 e 1000 e difficilmente si realizzano valori dell’ordine delle migliaia.

Deduciamo che è difficile canalizzare le linee del campo magnetico ovvero confinare un campo magnetico in un prefissato spazio o percorso. Il “flusso disperso” (cioè quello che segue percorsi non desiderati e sempre presente e in molti casi non trascurabile).

Per esempio se si usasse ferro con $\mu_r = 100$ per realizzare un circuito magnetico immerso in aria ($\mu_r = 1$) è quasi come realizzare un circuito elettrico in rame che impiegasse come isolante il nichelcromo (il rapporto delle conduttività dei due materiali è poco meno di 100).

Per realizzare buoni circuiti magnetici è pertanto necessario combinare alla scelta dei materiali un adeguato progetto della distribuzione delle spire che, percorse da corrente producono il campo magnetico, distribuzione che deve favorire la canalizzazione delle linee di campo.

Per esempio, consideriamo un circuito magnetico toroidale in ferro sul quale sono avvolte N spire. Se queste spire sono distribuite uniformemente lungo il circuito ferromagnetico toroidale come nella figura sotto a sinistra, le linee di campo (in rosso in figura) sono per loro natura canalizzate nel toro (lo erano già quando il solenoide toroidale era addirittura in aria!)



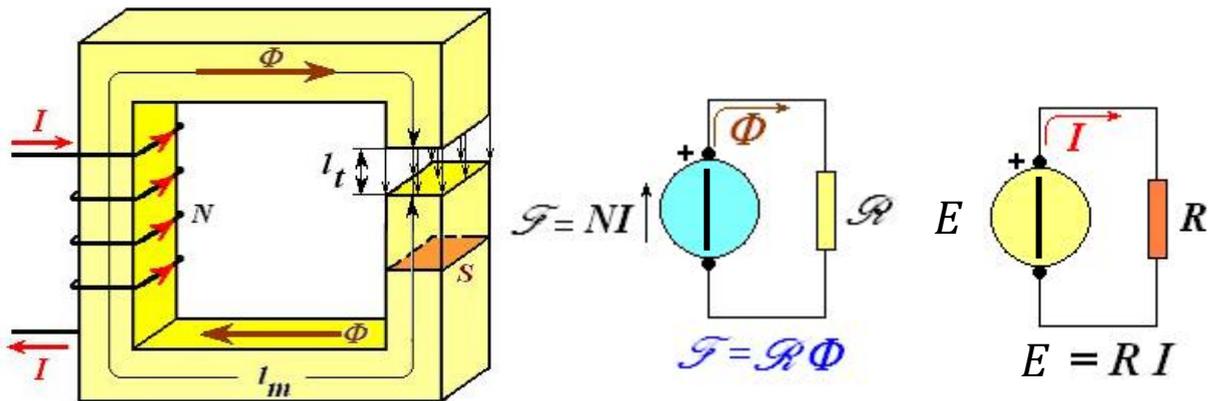
Se invece le stesse spire sono concentrate su una porzione del circuito toroidale ferromagnetico, le linee di campo saranno (approssimativamente) come nella figura di destra. Alcune linee di campo trovano non così “svantaggioso” chiudersi su percorsi più brevi in aria piuttosto che più lunghi in ferro. E il circuito magnetico non è più così ben definito.

Ciononostante, in molti problemi pratici, i flussi dispersi, cioè le linee di campo che seguono percorsi non desiderati, per semplicità vengono ignorati.

Qui di seguito alcuni esempi di calcolo di circuiti magnetici, con le relative regole.

Problema 13.1: Studiamo il circuito magnetico di figura realizzato in materiale ferromagnetico con permeabilità relativa $\mu_r = 2000$, avente sezione uniforme $S = 1\text{cm}^2$ e lunghezza $l_m = 200\text{ mm}$. Nel circuito magnetico è praticato un traferro in aria dallo spessore $l_t = 1\text{mm}$. L'avvolgimento disposto su un lato del circuito magnetico è costituito da $N = 100$ spire percorse dalla corrente $I = 2\text{A}$. Vogliamo trovare:

- a) Il flusso Φ che percorre il circuito magnetico.
- b) L'induttanza L presentata dall'avvolgimento.
- c) L'energia magnetica accumulata in presenza della corrente I data.



Il problema ci consente di introdurre e discutere diversi aspetti relativi allo studio dei circuiti magnetici. Prima di tutto supponiamo di poter trascurare i flussi dispersi, cioè di assumere che tutte le linee di campo magnetico sono canalizzate entro il circuito ferromagnetico ad esclusione del breve percorso del traferro che viene attraversato rispettando il contenimento delle spire nella sezione S . In realtà nell'attraversare il traferro si avrà "uno spanciamento" delle linee di campo, così come linee di campo esisteranno anche fra il giogo superiore e quello inferiore senza passare per il traferro, ma occupando tutto lo spazio circostante. Tutte queste sono trascurate.

Allora possiamo dire che il circuito magnetico allo studio è un tubo di flusso, cioè un percorso definito da un fascio di linee di campo, in questo caso di sezione S uniforme su tutta la sua estensione, che non escono mai dalla superficie laterale.

Questa assunzione ci consente di parlare di flusso Φ del tubo di flusso [Weber, Wb], pari all'integrale di superficie dell'induzione magnetica \vec{B} su una sezione del tubo di flusso. Prendendo una sezione S ortogonale alle linee di campo e assumendo uniforme l'intensità di \vec{B} sulla superficie (o prendendo la B media) possiamo scrivere:

$$\Phi = B \cdot S$$

che, per il nostro circuito e per le assunzioni fatte assume lo stesso valore per ogni sezione considerata. Essendo la sezione del nostro circuito magnetico sempre la stessa lungo tutto il percorso si avrà che anche l'intensità del vettore magnetico B (densità di flusso) è la stessa ovunque, sia nel materiale magnetico che nel traferro: $B=B_m=B_t$.

Applichiamo ora la legge della circuitazione ad una linea di campo, orientata coerentemente con il verso positivo assegnato alla corrente che percorre le spire (in figura, verso orario). Si scriverà:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m \cdot l_m + H_t \cdot l_t = NI$$

dove H_m è il campo magnetico nel tratto in materiale ferromagnetico e H_t quello nel traferro in aria. Mettendo ciascuno in relazione all'intensità dell'induzione magnetica otteniamo:

$$NI = \frac{B_m}{\mu_0 \mu_r} l_m + \frac{B_t}{\mu_0} l_t = \left(\frac{l_m}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{l_t}{\mu_0 S} \right) \Phi = (\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_t) \Phi = \mathcal{R} \Phi$$

Questa equazione è formalmente analoga a quella di un circuito chiuso elettrico che presenta due resistenze in serie e nel quale agisce una forza elettromotrice E e si manifesta una corrente I

$$E = (R_1 + R_2)I = RI$$

Sfruttando l'analogia allora definiamo:

$$\mathcal{F} = (\mathcal{R}_m + \mathcal{R}_t) \Phi = \mathcal{R} \Phi$$

con:

- *Forza magnetomotrice* $\mathcal{F} = NI$ [ampere-spire, Asp]
- *Riluttanza del tronco ferromagnetico* $\mathcal{R}_m = \frac{l_m}{\mu_0 \mu_r S}$ [ampere-spire/weber = henry⁻¹, H⁻¹=1/H]
- *Riluttanza del traferro* $\mathcal{R}_t = \frac{l_t}{\mu_0 S}$ [ampere-spire/weber = henry⁻¹, H⁻¹=1/H]
- *Riluttanza totale della serie delle due riluttanze* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_t$

Per il nostro circuito magnetico:

- *Forza magnetomotrice* $\mathcal{F} = NI = 100 \cdot 2 = 200$ Asp (dimensionalmente pari ad ampere)
- *Riluttanza del tronco ferromagnetico* $\mathcal{R}_m = \frac{l_m}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{0.2}{1.256 \cdot 10^{-6} \cdot 2000 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 0.7962 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$
- *Riluttanza del traferro* $\mathcal{R}_t = \frac{l_t}{\mu_0 S} = \frac{0.001}{1.256 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 7.962 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} \quad (= 10 \mathcal{R}_m)$
- *Riluttanza totale della serie delle due riluttanze* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_t = 8.758 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}$
- *Flusso del tubo di flusso (del circuito)* $\Phi = \mathcal{F} / \mathcal{R} = 200 / 8.758 \cdot 10^6 = 2.284 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$
- *Induzione magnetica* $B = \Phi / S = 2.284 \cdot 10^{-5} / 10^{-4} = 0.2284 \text{ Wb/m}^2 = 0.2284 \text{ T}$ (tesla)
- *Campo magnetico nel tronco ferromagnetico* $H_m = B / (\mu_0 \mu_r) = 0.2284 / (1.256 \cdot 10^{-6} \cdot 2000) = 90.92 \text{ A/m}$

- *Campo magnetico nel traferro* $H_t = B/\mu_0 = 0.228/(1.256 \cdot 10^{-6}) = 1.818 \cdot 10^5 \text{ A/m} = 181800 \text{ A/m}$
- *Verifica della legge della circuitazione:*

$$NI = 200 \text{ Asp} = H_m \cdot l_m + H_t \cdot l_t = 90.92 \cdot 0.2 + 181800 \cdot 0.001 = 200 \text{ Asp}$$

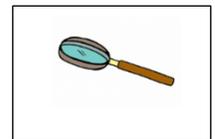
Per valutare l'induttanza L dobbiamo dapprima calcolare il flusso concatenato Φ_c che sarà pari a:

$$\Phi_c = N\Phi = 100 \cdot 2.284 \cdot 10^{-5} = 2.284 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

e di conseguenza

$$L = \frac{\Phi_c(I)}{I} = \frac{2.284 \cdot 10^{-3}}{2} = 1.142 \cdot 10^{-3} \text{ H} \equiv 1.142 \text{ mH}$$

Possiamo approfittare del problema per derivare una formula utile al calcolo del coefficiente di autoinduttanza L di un circuito di N spire avvolto su un tubo di flusso di riluttanza \mathcal{R} . In questa situazione si ha:



$$L = \frac{\Phi_c(I)}{I} = \frac{N\Phi(I)}{I} = \frac{N}{I} \frac{F(I)}{\mathcal{R}} = \frac{N}{I} \frac{NI}{\mathcal{R}}$$

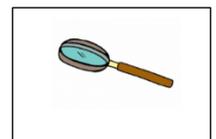
e in definitiva

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad \textit{induttanza di } N \textit{ spire avvolte su circuito magnetico di riluttanza } \mathcal{R}$$

Infine, passiamo al calcolo dell'energia accumulata. Il modo più semplice per calcolarla è attraverso il valore dell'induttanza attraverso la formula:

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2 = 0.5 \cdot 1.142 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 = 2.284 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

NB - Si può calcolare anche con $W_L = \frac{1}{2} \Phi_c I = \frac{1}{2} \frac{\Phi_c^2}{L}$



Ancora possiamo cogliere l'occasione per un approfondimento. Partiamo da un'espressione dell'energia accumulata ed elaboriamola.

$$W_L = \frac{1}{2} \Phi_c I = \frac{1}{2} (BS) \frac{H_m \cdot l_m + H_t \cdot l_t}{N} = (Sl_m) \left(\frac{1}{2} B_m H_m \right) + (Sl_t) \left(\frac{1}{2} B_t H_t \right)$$

(si è sfruttata l'uguaglianza $B=B_m=B_t$). Si può leggere anche, introducendo i volumi dei vari tronchi del circuito magnetico, come

$$W_L = (Vol_m) \left(\frac{1}{2} B_m H_m \right) + (Vol_t) \left(\frac{1}{2} B_t H_t \right)$$

così da poter definire una densità volumica di energia magnetica nei vari punti con la

$$w'_L = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad [J/m^3]$$

Con i dati del Problema in corso si ha:

$$w'_{L,m} = \frac{1}{2} B_m H_m = 10.38 \quad [J/m^3]$$

$$w'_{L,t} = \frac{1}{2} B_t H_t = 20760 \quad [J/m^3]$$

$$\begin{aligned} W_L &= (Vol_m) \left(\frac{1}{2} B_m H_m \right) + (Vol_t) \left(\frac{1}{2} B_t H_t \right) = (0.0001 \cdot 0.2) 10.38 + (0.0001 \cdot 0.001) 20760 \\ &= 0.2076 \cdot 10^{-3} + 2.076 \cdot 10^{-3} = 2.284 \cdot 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

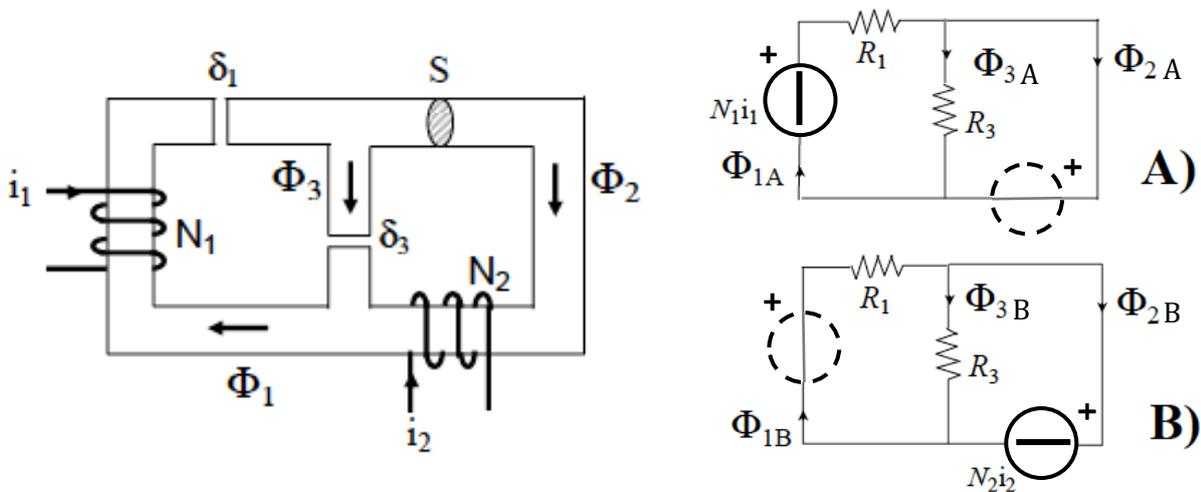
Si riconosce che la densità di energia è molto più alta nell'aria che nel ferro e che, nonostante il volume del traferro si 200 volte più piccolo di quello del ferro, l'energia è prevalentemente accumulata nel traferro.

Tutto ciò giustifica l'assunzione che spesso si può fare di assumere di valore infinito la permeabilità magnetica delle parti di circuito magnetico realizzate con materiali ferromagnetici.

(Autovalutazione) Ripetere lo svolgimento del problema sostituendo il dato $\mu_r = 2000$ con $\mu_r = \infty$ e confrontare i risultati.

Problema 13.2: Studiamo il circuito magnetico di figura realizzato in materiale ferromagnetico con permeabilità relativa $\mu_r \cong \infty$, avente sezione uniforme $S = 2 \text{ cm}^2$. Nel circuito magnetico sono praticati due traferri in aria aventi spessore $\delta_1 = 0.8 \text{ mm}$ e $\delta_3 = 1.2 \text{ mm}$. I due avvolgimenti hanno rispettivamente $N_1 = 150$ spire e $N_2 = 200$ spire. Essi sono percorsi dalle correnti $i_1 = 6 \text{ A}$ e $i_2 = 2 \text{ A}$ con i versi positivi assegnati. Vogliamo trovare:

- I flussi Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 che percorrono i tre rami del circuito magnetico con i versi prefissati.
- Le induttanze L_1 e L_2 dei due avvolgimenti e a la mutua induttanza M .
- L'energia magnetica accumulata, con la sola corrente i_1 data, quindi con la sola i_2 data, quindi con entrambe le correnti.



Ancora assumiamo che le linee di campo siano perfettamente canalizzate nel circuito magnetico e che attraversino i traferri restando parallele a sé stesse. Allora il circuito è formato da tre tubi di flusso (tronchi del circuito) e al nodo di confluenza si potrà applicare un bilancio dei flussi analogo al principio di Kirchhoff per le correnti.

Essendo la riluttanza dei tronchi ferromagnetici $\mu_r \cong \infty$, le rispettive riluttanze saranno nulle. Rimangono solo le riluttanze di due traferri che calcoliamo:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\delta_1}{\mu_0 S} = \frac{0.8 \cdot 10^{-3}}{1.256 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 3.185 \cdot 10^6 \quad \text{H}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{\delta_3}{\mu_0 S} = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{1.256 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 4.777 \cdot 10^6 \quad \text{H}^{-1}$$

Calcoliamo poi le due forze magnetomotrici (fmm) dei due avvolgimenti, che collocheremo nel ramo del circuito magnetico che porta gli avvolgimenti con verso di azione coerente con il verso assegnato di percorrenza degli avvolgimenti (verso di avanzamento di una vite destrorsa che ruota secondo il verso positivo delle spire) come mostrato nella parte di destra della figura. Ogni linea chiusa impiegata per applicare la legge di circuitazione di H che percorra il tronco di circuito magnetico ove è collocato l'avvolgimento, concatenerà la corrispondente fmm.

$$\mathcal{F}_1 = N_1 i_1 = 150 \cdot 6 = 900 \text{ Asp}$$

$$\mathcal{F}_2 = N_2 i_2 = 200 \cdot 2 = 400 \text{ Asp}$$

Possiamo ora risolvere il circuito magnetico abbinandolo all'equivalente circuito elettrico con le corrispondenze $f_{mm} \equiv f_{em}$, riluttanze \equiv resistenze, flussi \equiv correnti, tensioni magnetiche (sulle riluttanze) \equiv tensioni elettriche (sulle resistenze).

Impieghiamo, per comodità visto che dobbiamo calcolare i coefficienti di auto e mutua induttanza, il principio di sovrapposizione degli effetti, applicando prima la fmm \mathcal{F}_1 (circuito A) e poi la fmm \mathcal{F}_2 (circuito B)).

Circuito A)

$$V_{R3,A} = 0 \gg \Phi_{3A} = 0$$

$$\Phi_{1A} = \Phi_{2A} + \Phi_{3A} = \Phi_{2A}$$

$$\Phi_{1A} = \Phi_{2A} = N_1 i_1 / \mathcal{R}_1 = 900 / (3.185 \cdot 10^6) = 2.826 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Circuito B)

$$V_{R3,B} = N_2 i_2 \gg \Phi_{3B} = N_2 i_2 / \mathcal{R}_3 = 400 / (4.777 \cdot 10^6) = 0.8373 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_{1B} = - N_2 i_2 / \mathcal{R}_1 = - 1.256 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_{2B} = \Phi_{1B} - \Phi_{3B} = - 1.256 \cdot 10^{-4} - 0.8373 \cdot 10^{-4} = - 2.093 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Con entrambe le fmm avremo quindi i seguenti flussi nei tre tubi di flusso=

$$\Phi_1 = \Phi_{1A} + \Phi_{1B} = 1.570 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2A} + \Phi_{2B} = 0.7330 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi_3 = \Phi_{3A} + \Phi_{3B} = 0.8373 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

NB - Si verifica che $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$.

(Autovalutazione) Ripetere il calcolo dei flussi senza usare la sovrapposizione degli effetti (cfr. Esercizio 5 dell'Autovalutazione di Marzo).

I coefficienti di auto e mutua induttanza sono per definizione:

$$L_1 = \left. \frac{\Phi_{c1}(i_1)}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

Il flusso concatenati $\Phi_{c1}(i_1)$ con l'avvolgimento 1 dovuto alla sola corrente i_1 lo possiamo dedurre rapidamente avendo già studiato il circuito magnetico con la sola corrente i_1 (circuito A)). Abbiamo allora

$$L_1 = \frac{\Phi_{c1}(i_1)}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{N_1 \Phi_{1A}}{i_1} = \frac{150 \cdot 2.826 \cdot 10^{-4}}{6} = 7.065 \cdot 10^{-3} \quad H$$

(Autovalutazione) Ripetere il calcolo di L_1 impiegando la formula $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$

In maniera simile, tenendo però conto che per il flusso Φ_2 è stato fissato (dal testo) un vero positivo contrario a quello che si dovrebbe utilizzare per il calcolo del flusso concatenato Φ_{c2}

$$M = M_{21} = \frac{\Phi_{c2}(i_1)}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{-N_2 \Phi_{2A}}{i_1} = \frac{-200 \cdot 2.826 \cdot 10^{-4}}{6} = -9.420 \cdot 10^{-3} \quad H$$

Possiamo ripetere scambiando le correnti, facendo ora riferimento al circuito B).

$$L_2 = \frac{\Phi_{c2}(i_2)}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{-N_2 \Phi_{2B}}{i_2} = \frac{-200 \cdot (-2.093) \cdot 10^{-4}}{2} = 20.93 \cdot 10^{-3} \quad H$$

(giustamente positivo come deve essere!).

(Autovalutazione) Ripetere il calcolo di L_2 impiegando la formula $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$

Poi:

$$M = M_{12} = \frac{\Phi_{c1}(i_2)}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{N_1 \Phi_{1B}}{i_2} = \frac{150 \cdot (-1.256) \cdot 10^{-4}}{2} = -9.420 \cdot 10^{-3} \quad H$$

(giustamente pari al valore precedentemente già calcolato!).

L'energia accumulata da un mutuo induttore si calcola con la

$$W_L = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

che applicata alle nostre casistiche porta a :

a) Con sola corrente i_1

$$W_L = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 = 0.5 \cdot 7.065 \cdot 10^{-3} \cdot 6^2 = 0.1272 \quad J$$

b) Con sola corrente i_2

$$W_L = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = 0.5 \cdot 20.93 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 = 0.04186 \quad J$$

c) Con entrambe le correnti

$$\begin{aligned}
 W_L &= \frac{1}{2}L_1i_1^2 + Mi_1i_2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \\
 &= 0.5 \cdot 7.065 \cdot 10^{-3} \cdot 6^2 - 9.420 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 2 + 0.5 \cdot 20.93 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 \\
 &= 0.05602 \text{ J}
 \end{aligned}$$

(Autovalutazione) Calcolare le tre energie a partire dalla densità di energia nei traferri e dal volume dei traferri stessi.

(Autovalutazione) Calcolare le tre energie assumendo, con i versi positivi di figura, $i_1=6 \text{ A}$ e $i_2 = -2 \text{ A}$.

Problema 13.3: (Autovalutazione) E' dato il circuito magnetico di figura realizzato in materiale ferromagnetico con permeabilità relativa $\mu_r \cong \infty$. I due avvolgimenti hanno rispettivamente $N_1= 100$ spire e $N_2 = 200$ spire. Essi sono percorsi dalle correnti $i_1 = 5.6 \text{ A}$ e $i_2 = 7 \text{ A}$ con i versi positivi assegnati.

Nel circuito magnetico sono praticati tre traferri in aria aventi i seguenti dati geometrici

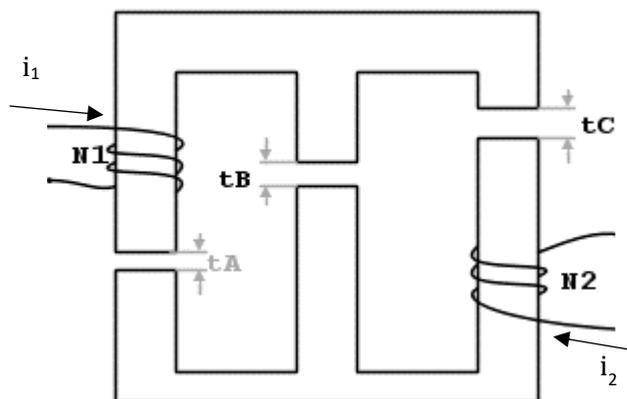
Traferro A: spessore $t_A = 1 \text{ mm}$, sezione $S_A = 0.8 \text{ cm}^2$

Traferro B: spessore $t_B = 1 \text{ mm}$, sezione $S_A = 1.6 \text{ cm}^2$

Traferro C: spessore $t_B = 2 \text{ mm}$, sezione $S_A = 0.8 \text{ cm}^2$

Trovare:

- I flussi Φ_A, Φ_B, Φ_C che attraversano i tre traferri (definire i versi positivi prima del calcolo).
- Le induttanze L_1 e L_2 dei due avvolgimenti e la mutua induttanza M .
- L'energia magnetica accumulata quando sono presenti entrambe le correnti e la densità volumica di energia nei tre traferri nelle stesse condizioni.



[R: $L_1 = 710 \mu\text{H}$; $L_2 = 1710 \mu\text{H}$; $M=286 \mu\text{H}$]