L'algebra lineare è sostanzialmente lo studio degli spazi vettoriali.

Prima di intraprendere lo studio dell'algebra lineare vera e propria, introduciamo alcuni concetti preliminari generali:

(i) Il linguaggio che useremo

(ii) Gli insiemi di numeri con cui avremo a che fare e le operazioni algebriche su questi insiemi.

Da questi insiemi e le operazioni su di essi, astraendo e generalizzando, giungeremo alla nozione di <u>campo</u>, sulla quale si baserà la definizione di spazio vettoriale.

Il linguaggio

Ogni definizione e ogni risultato di algebra lineare (e più in generale in matematica) possono essere espressi tramite il solo uso della <u>logica matematica</u> e della <u>teoria degli insiemi</u>.

I simboli della logica matematica sono:

$\Longrightarrow$ (implicazione)

$\vee$ (disgiunzione)

$\wedge$ (congiunzione)

$\neg$ (negazione)

$\forall$ (quantificatore universale (per ogni))

$\exists$ (quantificatore esistenziale (esiste))

<u>Esempi</u>:

(a) "Piove e non ho l'ombrello, dunque mi bagno oppure rientro"

si può scrivere nel seguente modo:

(Piove $\wedge$ ($\neg$ ho l'ombrello)) $\Longrightarrow$ (mi bagno $\vee$ rientro)

(b) "Ogni giorno è vero che c'è un tempo per lavorare e un tempo per riposare"

si può scrivere nel seguente modo:

$\forall$ giorno, ($\exists$ momento di tale giorno t.c. in tale momento è opportuno lavorare) $\wedge$ ($\exists$ momento di tale giorno t.c. in tale momento è opportuno riposare)

<u>Oss</u>: i simboli sopra elencati non sono indipendenti tra di loro; è possibile definire i simboli $\Rightarrow, \wedge, \exists$ in termini dei soli simboli $\vee, \neg, \forall$.

Ad esempio, $A \Rightarrow B$ equivale a $(\neg A) \vee B$, ossia A implica B è sinonimo di o A è falso o B è vero.

I simboli della teoria degli insiemi sono:

$\in$ (è un elemento)

$\subset$ (è contenuto)

$\cup$ (unione)

$\cap$ (intersezione)

$-$ (sottrazione insiemistica)

$\times$ (prodotto tra insiemi)

$f : A \to B$ (f è un'applicazione da A a B)

$\{ x \mid P(x) \}$ (l'insieme degli x che godono della proprietà P)

$=$ (uguale)

Esempi:

(a) Gianni è uno studente dell'università di Padova ma non è residente a Padova"

è possibile, ad esempio, tradurlo tramite la teoria degli insiemi nel seguente modo:

$$\text{Gianni} \in \{ x \mid x \text{ è uno studente dell'università di Padova} \} - \{ y \mid y \text{ risiede a Padova} \}$$

(b) "Il padre di un qualsiasi studente dell'università di Padova ha sicuramente più di trent'anni"

è possibile tradurlo tramite la teoria degli insiemi nel seguente modo:

Sia $X = \{ x \mid x \text{ è uno studente dell'università di Padova} \}$,

sia $Y = \{ y \mid y \text{ è un uomo} \}$

sia $U = \{ u \mid u \text{ è un essere vivente di età maggiore di trent'anni} \}$

Sia $f : X \longrightarrow Y$ l'applicazione tale che

a x associa il padre di x, ossia $f(x) =$ padre di x,

Sia $f(X) = \{ y \mid y \in Y \text{ e } \exists x : (x \in X) \text{ e } f(x) = y \}$,

[$f(X)$ è detta l'immagine di X tramite f]

Allora si ha $f(X) \subset Y \cap U$.

Morale: Il linguaggio usato per esprimere l'algebra lineare (e la matematica in generale) è molto meno ricco del linguaggio comune; il vocabolario è estremamente ridotto e le regole di grammatica sono semplici, ma precisissime, molto più precise di un linguaggio comune.

Introduciamo ora gli insiemi di numeri fondamentali e le operazioni algebriche su questi insiemi.

$\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$

$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi

$\mathbb{Z} = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \}$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0, \ \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n \}$

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali

Le operazioni algebriche fondamentali su questi insiemi di numeri sono:

- l'addizione
- la moltiplicazione

Su ognuno di questi insiemi queste operazioni hanno le seguenti proprietà:

- commutatività ($x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$)
- associatività ($(x+y) + z = x + (y+z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$)
- esistenza dell'elemento neutro
  ($\forall x, \ x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$)
- distributività del prodotto rispetto alla somma $x(y+z) = xy + xz$

In $\mathbb{N}$, il solo elemento che ha un opposto è 0,

infatti $m+n=0 \Rightarrow m=n=0$, se $m,n \in \mathbb{N}$.

Aggiungendo l'opposto di ogni elemento di $\mathbb{N}$ si ottiene $\mathbb{Z}$.

In $\mathbb{Z}$, il solo elemento che ha un inverso è 1,

infatti $x \cdot y = 1 \Rightarrow x = y = 1$ se $x,y \in \mathbb{Z}$.

Aggiungendo l'inverso $\frac{1}{n}$ di ogni elemento non nullo n di $\mathbb{Z}$ si ottiene $\mathbb{Q}$.

L'insieme di numeri $\mathbb{Q}$, con le operazioni di somma e prodotto, gode quindi delle seguenti proprietà:

(a) commutatività di somma e prodotto

$$x+y=y+x \quad e \quad x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x,y \in \mathbb{Q}$$

(b) associatività di somma e prodotto

$$x+(y+z)=(x+y)+z \quad e \quad x(yz)=(xy)z \quad \forall x,y,z$$

(c) distributività del prodotto rispetto alla somma

$$x(y+z) = xy + xz \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}$$

(d) Esistenza dell'elemento neutro della somma ed esistenza dell'elemento neutro per il prodotto

$$x+0=x \quad e \quad x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

(e) esistenza dell'opposto di un qualsiasi elemento

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q} : x+y=0 \quad [y \text{ si denota } -x]$$

(f) esistenza dell'inverso di un qualsiasi elemento non nullo

$$\forall x \in \mathbb{Q} - \{0\},\ \exists y \in \mathbb{Q} : x \cdot y = 1$$

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, con le operazioni di somma e prodotto, si dice che formi un campo.

È possibile dare una definizione astratta di campo, assiomatizzando le proprietà sopra elencate di $\mathbb{Q}$.

<u>Def</u>: Un insieme K, munito di due operazioni $+_K : K \times K \to K$ e $\cdot_K : K \times K \to K$ si dice un campo se le operazioni $+_K$ e $\cdot_K$ soddisfano le proprietà analoghe alle (a), (b), (c), (d), (e), (f) di $\mathbb{Q}$.

<u>Esempio</u>: $(a)_K$ commutatività di $+_K$ e $\cdot_K$

$$x +_K y = y +_K x \quad e \quad x \cdot_K y = y \cdot_K x.$$

<u>Oss</u>: I ragionamenti di algebra lineare coinvolgeranno solo le proprietà (a), (b), (c), (d), (e), (f), dunque le definizioni e i risultati fondamentali che vedremo saranno validi su qualsiasi campo.

Oss: Alcuni risultati più avanzati saranno invece validi solo per campi particolari quali i numeri reali o i numeri complessi.

Per le esigenze della geometria sarà necessario considerare il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

I numeri reali si ottengono dai razionali tramite un procedimento di completamento, aggiungendo ad esempio

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, e, π.

In generale, tutti gli elementi di $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ si dicono numeri irrazionali.

Molti polinomi (anche a coefficienti in $\mathbb{Q}$) non hanno radici razionali ma ammettono radici reali.

Si dimostra usando la continuità il seguente risultato.

Teorema: Sia $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

con $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, n dispari,

allora $f(x)$ ammette una radice reale.

(ossia $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0$).

Esempio: $x^3 + 2$ non ha radici razionali ma ha radici reali.

Tuttavia non tutti i polinomi ammettono radici, anche considerando il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

__Esempio:__ Il polinomio x^2+1 non ammette radici reali.

Per ovviare a questo problema si introducono i numeri complessi. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi sarà un campo in cui ogni polinomio di grado non nullo ammette una radice.

__Riassumendo:__

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Le inclusioni sono tutte proprie (ossia non sono uguaglianze).

(i) da $\mathbb{N}$ si ottiene $\mathbb{Z}$ aggiungendo l'opposto di ogni elemento
(ii) da $\mathbb{Z}$ si ottiene $\mathbb{Q}$ aggiungendo l'inverso di ogni elemento $\neq 0$
(iii) da $\mathbb{Q}$ si ottiene $\mathbb{R}$ tramite un procedimento di completamento
(iv) da $\mathbb{R}$ si ottiene $\mathbb{C}$ aggiungendo le radici dei polinomi.

__Oss:__ Vedremo che fondamentalmente si aggiungerà una radice di x^2+1 e ciò sarà sufficiente per ottenere $\mathbb{C}$.

Discutiamo più in dettaglio il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali ed il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

- $\mathbb{R}$

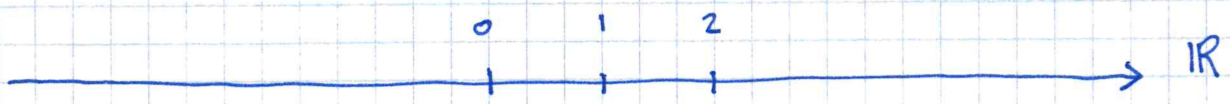
È possibile individuare univocamente un numero reale tramite la sua espansione decimale.

<u>Esempi:</u>

(i) $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$

(ii) $\pi = 3,1415926\ldots$

I numeri reali possono essere messi in biezione con i punti di una retta, ad esempio con i punti sull'asse delle x di un piano cartesiano.



- $\mathbb{C}$

un numero complesso z è individuato da una coppia (x_1, x_2) di numeri reali.

Ossia, $\mathbb{C}$, come insieme, si identifica con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (anche denotato $\mathbb{R}^2$).

Definiamo ora la struttura di campo di $\mathbb{C}$.

Dobbiamo definire dunque le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{C}$; le definiremo a partire dalle analoghe operazioni su $\mathbb{R}$.

<u>Def</u>: Somma tra numeri complessi

Sia $z_1 = (x_1, y_1)$, con $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ e sia $z_2 = (x_2, y_2)$, con $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, allora si definisce la somma $z_1 + z_2$ nel seguente modo:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2) .$$

<u>Def</u>: Prodotto tra numeri complessi

Sia $z_1 = (x_1, y_1)$, con $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ (ossia $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$), sia $z_2 = (x_2, y_2)$, con $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ (ossia $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$), allora si definisce il prodotto $z_1 \cdot z_2$ nel seguente modo:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 , x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) .$$

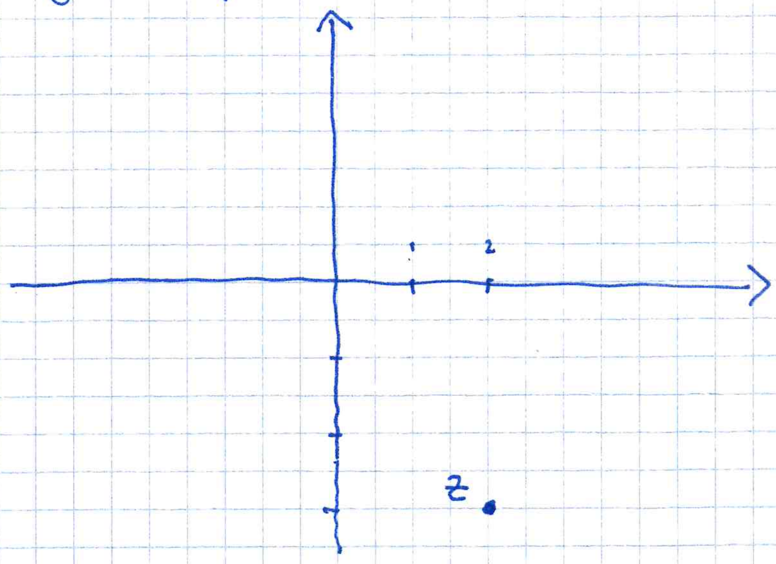
<u>Esercizio</u>: Verificare che le operazioni di somma e di prodotto di numeri complessi sono commutative ed associative e verificare che la distributività del prodotto rispetto alla somma in $\mathbb{C}$.

Abbiamo detto che $\mathbb{R}$ può essere identificato con l'asse delle x del piano cartesiano, segue dunque che $\mathbb{C}$ può essere identificato con il piano cartesiano.

Questa identificazione è detta <u>rappresentazione geometrica dei numeri complessi</u>

<u>Esempio</u>: $z = (2, -3) \in \mathbb{C}$

La rappresentazione geometrica di z è



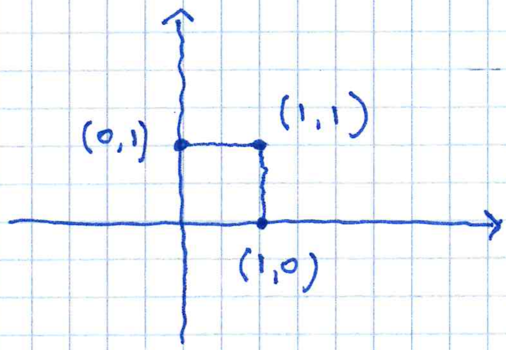
<u>Def</u>: Il piano cartesiano, identificato con $\mathbb{C}$, si dice <u>piano di Argand-Gauss</u>.

<u>Oss</u>: Mentre la somma tra numeri complessi ha un'interpretazione geometrica semplice tramite la regola del parallelogramma, la moltiplicazione tra numeri complessi non ha un'interpretazione altrettanto semplice.

Esempi:

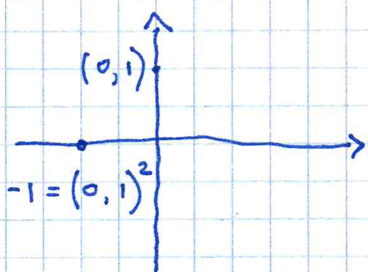
(a) $(1,0)+(0,1)=(1,1)$

geometricamente



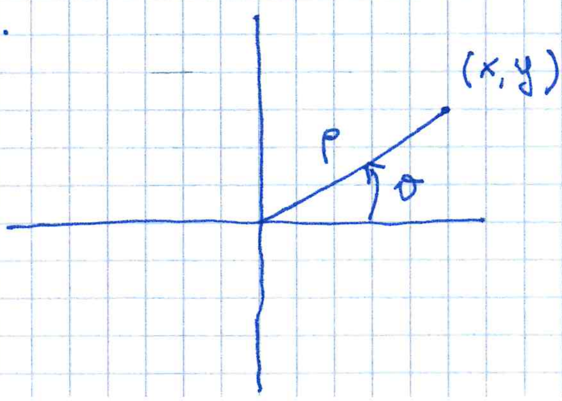
(b) $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$

geometricamente



Le coordinate cartesiane del piano permettono una espressione semplice della regola del parallelogramma.

Per avere un'espressione semplice del prodotto tra numeri complessi considereremo sul piano le coordinate polari.



Un punto del piano può essere individuato dalla sua distanza dall'origine degli assi e dall'angolo orientato che va dal semiasse positivo delle x alla semiretta individuata dal punto e uscente dall'origine.

Le formule di passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane sono

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \vartheta \\ y &= \rho \sin \vartheta \end{aligned} \qquad \text{con} \quad \rho \geq 0, \ \vartheta \in [0, 2\pi)$$

invertendo queste si ottiene

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \\[2ex] \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & \text{se} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0 \text{ e } y > 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} + \pi & \text{se} \quad x = 0 \text{ e } y < 0. \\[2ex] \text{indefinito} & \text{se} \quad x = 0, y = 0 \end{cases}$$

Le coordinate polari di un punto del piano di Argand-Gauss forniscono la rappresentazione trigonometrica del numero complesso che corrisponde a tale punto.

Diamo qualche definizione per fissare il linguaggio.

<u>Def</u>: $i = (0,1) \in \mathbb{C}$

Si verifica che $i^2 = i \cdot i = -1$ e che se $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, si ha $z = \underline{a} + i\underline{b}$, dove $\underline{a} = (a,0)$ e $\underline{b} = (b,0)$.

<u>Oss</u>: L'identificazione di $x \in \mathbb{R}$ con $\underline{x} = (x,0) \in \mathbb{C}$ immerge $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ in maniera tale che le operazioni di somma e di prodotto definite su $\mathbb{C}$ estendano le analoghe operazioni su $\mathbb{R}$.

(cioè $\underline{x} + \underline{y}$ è uguale a $(x+y, 0)$ e
$\underline{x} \cdot \underline{y}$ è uguale a $(x \cdot y, 0)$)

<u>Def</u>: Sia $z \in \mathbb{C}$, la rappresentazione

$z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ si dirà rappresentazione algebrica di z e la rappresentazione

$z = \rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ si dirà rappresentazione geometrica di z.

Inoltre, se $z = a + ib = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$,

(i) a si denota $\mathrm{Re}(z)$ e si dice parte reale di z

b si denota $\mathrm{Im}(z)$ e si dice parte immaginaria di z

(ii) $\rho = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ si dice norma di z

e si denota $\|z\|$

ϑ si denota $\mathrm{Arg}(z)$ e si dice argomento di z.