Abbiamo visto la definizione di campo e i tre [redacted] esempi di campo che più ci interesseranno, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Ora vediamo la nozione di spazio vettoriale su un campo.

<u>Def</u>: Uno spazio vettoriale su un campo K è il dato di

(i) un insieme non vuoto V e un'operazione $+_V : V \times V \longrightarrow V$, detta somma, soddisfacente alle seguenti condizioni

(a) associatività: $\forall x, y, z \in V$, $(x +_V y) +_V z = x +_V (y +_V z)$

(b) commutatività: $\forall x, y \in V$, $x +_V y = y +_V z$

(c) esistenza di un elemento neutro 0_V: $\forall x \in V$, $x +_V 0_V = x$

(d) ogni elemento ammette un opposto: $\forall x \in V$, $\exists\, -x \in V$ t.c.

$$x +_V -x = 0_V .$$

(ii) un'azione esterna di K su V, ossia [redacted] un'applicazione $K \times V \longrightarrow V$ che ad una qualsiasi coppia (π, v), con $\pi \in K$, $v \in V$, associa un elemento, denotato πv, di V.

L'operazione somma $+_V$ e l'operazione esterna soddisfano alle seguenti condizioni:

(α) $\forall v \in V$, $1 v = v$

(β) $\forall v \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $(\alpha + \beta) v = \alpha v +_V \beta v$

(γ) $\forall v, w \in V$, $\forall \alpha \in K$, $\alpha (v +_V w) = \alpha v +_V \alpha w$

(δ) $\forall v \in V$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $(\alpha\beta) v = \alpha (\beta v)$

Prime proprietà degli spazi vettoriali

1. $0v = 0_V$, $\forall v \in V$.

Infatti si ha

$$0v = (0+0)v = 0v +_V 0v$$

da cui

$$0v +_V -0v = 0v +_V 0v +_V -0v$$

segue

$$0_V = 0v +_V 0_V = 0v .$$

2. $-1v = -v \quad \forall v \in V$

Infatti

$$0_V = 0v = (1+-1)v = 1v +_V -1v = v +_V -1v$$

dunque $-1v = -v$.

3. $\alpha 0_V = 0_V$, $\forall \alpha \in K$.

Infatti

$$\alpha 0_V = \alpha (0_V +_V 0_V) = \alpha 0_V +_V \alpha 0_V$$

da cui

$$0_V = \alpha 0_V +_V -\alpha 0_V = \alpha 0_V +_V \alpha 0_V +_V -\alpha 0_V = \alpha 0_V .$$

4. Se $\alpha \neq \beta$ $\alpha, \beta \in K$, $\alpha v \neq \beta v$ se $v \neq 0_V$.

Infatti

$$\alpha v = \beta v \iff \alpha v +_V -\beta v = 0_V \iff (\alpha - \beta) v = 0_V \iff v = \frac{1}{\alpha - \beta} 0_V$$

$$\iff v = 0_V .$$

<u>Osservazioni:</u>

(a) Un elemento di uno spazio vettoriale si dice vettore.

La frase "v è un vettore" vuol dire "v è un elemento di uno spazio vettoriale"; come vedremo, di esempi di spazi vettoriali ce ne sono molti e molto diversi tra di loro

(b) Benché tutte le costruzioni che faremo sarebbero possibili su un qualsiasi campo K, nel prosieguo ci limiteremo prevalentemente al campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

(c) la somma $+_V$ nello spazio vettoriale verrà denotata $+$ per concisione. Si badi tuttavia di non confonderla con la somma $+$ nel campo. Allo stesso modo 0_V si denoterà 0, ma non lo si confonda con lo 0 del campo.

Esempi di spazi vettoriali.

- Lo spazio vettoriale banale

$$V = \{0_V\} \qquad 0_V + 0_V = 0_V, \ \alpha 0_V = 0_V \ \ \forall \alpha \in K.$$

è lo spazio vettoriale più piccolo che si possa definire.

- Gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$
  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$
  $\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

la somma di due n-uple si effettua coordinata per coordinata.

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

la moltiplicazione di una n-upla per un numero reale α (anche detto scalare) si effettua coordinata per coordinata.

Esercizio: Verificare che $\mathbb{R}^n$ con questa operazione di somma e questa operazione esterna di moltiplicazione per un numero reale è uno spazio vettoriale. Chi è il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$? Chi è l'opposto di $(a_1, a_2, \dots, a_n)$?

- Gli spazi di matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$

<u>Def</u>: Siano $m, n \in \mathbb{N}$, m, n non nulli. Una matrice ad m righe ed n colonne ad entrate reali è una tabella A del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

t.c. gli a_{ij} siano dei numeri reali.

<u>Esempio</u>: (2) è una matrice 1×1 ad entrate reali.

<u>Esempio</u>: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

è una matrice 4×1 ad entrate reali

<u>Esempio</u>: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

è una matrice 3×4 ad entrate reali.

Siano $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ due matrici $m\times n$, ossia

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

la somma $A+B$ delle matrici A e B sarà la matrice $m\times n$ data da

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

ossia $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

<u>N.B.</u> Si sommano solo matrici dello stesso tipo, ossia con lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne; e la somma si effettua entrata per entrata.

<u>Esempio:</u>

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, allora si definisce la matrice prodotto di A per lo scalare α come segue

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

ossia la matrice αA sarà la matrice $m \times n$ ottenuta da A moltiplicando ogni sua entrata per α.

<u>Esempio</u>: $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = -3$

$$\alpha A = -3A = -3 \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 & -6 \\ -15 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: L'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è l'insieme di tutte le matrici ad m righe ed n colonne ad entrate reali.

L'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ dotato della somma tra matrici $m \times n$ sopra definita e del prodotto per un numero reale sopra definito è uno spazio vettoriale.

<u>Esercizio</u>: Verificare tale affermazione per $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Esibire il vettore nullo di $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Esibire l'opposto di $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esibire due vettori di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ diversi da $A, -A, O$.

- Spazi di polinomi

Def: Sia $n \in \mathbb{N}$. L'insieme $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$ è l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti reali, nella indeterminata X, di grado minore o uguale a n.

Esempio: $X^3 + X \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$, $X \in \mathbb{R}^{\leq 5}[X]$, $2 \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X]$

La somma tra polinomi si definisce coefficiente per coefficiente:

$$\left(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0\right) + \left(b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0\right) =$$

$$= (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0)$$

Esempio: $\left(5X^3 + 3X^2 - 2\right) + \left(-X^4 - 3X^3 + X + 1\right) = -X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X - 1$

Il polinomio nullo è il polinomio di grado 0 il cui termine noto è 0.

Il prodotto di un polinomio per un numero reale α è definito moltiplicando ogni coefficiente del polinomio per α:

$$\alpha\left(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0\right) = \alpha a_n X^n + \alpha a_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha a_1 X + \alpha a_0 .$$

Esempio: $2\left(-X^4 + 5X\right) = -2X^4 + 10X$

L'insieme $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$, munito della somma tra polinomi e della moltiplicazione per un numero reale sopra definite è uno spazio vettoriale.

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^{\leq 4}[X]$ calcolare

(i) $(X^3 - X^2 + 2) + 3(-X^2 - X - 1) + (-2)(X^4 + 1)$

(ii) l'opposto di $X^3 - 3X^2 + 1$

<u>Esercizio</u>: determinare un vettore v di $\mathbb{R}^{\leq 2}[X]$ tale che

$$2v + 3(2X^2 + 1) = 4X - 5$$