Abbiamo visto che $U \cup W$ non sempre è un sottospazio poiché non sempre è chiuso rispetto alla somma. Allora ingrandiamo l'insieme $U \cup W$ quel tanto che basta perché si ottenga un sottoinsieme chiuso rispetto alla somma ed avremo ottenuto il più piccolo sottospazio contenente U e W.

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, U e W dei sottospazi di V. Si definisce la somma $U+W$ di U e W come segue:

$$U+W = \{\, u+w \mid u \in U \text{ e } w \in W \,\}.$$

Vediamo che l'operazione somma tra sottospazi è il giusto sostituto dell'operazione unione.

<u>Prop</u>: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, U e W dei sottospazi di V. Allora l'insieme $U+W$ è il più piccolo spazio vettoriale contenente sia U che W.

<u>dim</u>. Dalla definizione si ha $U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$.

Usiamo ora il criterio di sottospazio per stabilire che $U+W$ è un sottospazio di V.

Siano $v, v' \in U+W$, si avrà $v = u+w$ per opportuni $u \in U$ e $w \in W$, e $v' = u'+w'$ per opportuni $u' \in U$ e $w' \in W$. Dunque $v+v' = u+w+u'+w' = (u+u')+(w+w')$

Ma $u+u' \in U$ e $w+w' \in W$, dunque $v+v' = (u+u')+(w+w')$ appartiene a $U+W$; cioè $U+W$ è chiuso per la somma.

Sia ora $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in U+W$. Ma allora si avrà $v = u+w$ per opportuni $u \in U$ e $w \in W$. E dunque $\lambda v = \lambda(u+w) =$
$= \lambda u + \lambda w \in U+W$ dato che $\lambda u \in U$ e $\lambda w \in W$. Cioè $U+W$ è chiuso per il prodotto per uno scalare.

$U+W$ è quindi un sottospazio di V.

Inoltre, se S è un sottospazio di V contenente U e W, allora S contiene anche $U+W$.

Infatti se $v \in U+W$, $v = u+w$ per opportuni $u \in U$ e $w \in W$, e dunque $v = u+w \in S$ dato che $u, w \in S$ e S è chiuso rispetto alla somma. Dunque $\forall v \in V$, $v \in U+W \Rightarrow v \in S$, ossia $U+W \subset S$. Ossia $U+W$ è il più piccolo sottospazio di V contenente U e W. □

<u>Prop:</u> Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ e $W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$ due sottospazi di V generati rispettivamente dai vettori $u_1, \dots, u_r$ e $w_1, \dots, w_s$. Allora si ha $U+W = \langle u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s \rangle$.

Ossia l'insieme $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$ è un insieme di generatori di $U+W$.

<u>dim</u>. Facciamo vedere che ogni vettore di $U+W$ è combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$.

Sia $v \in U+W$, allora $v = u+w$, con $u \in U$ e $w \in W$.

Ma $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$ poiché $u_1, \dots, u_r$ sono dei generatori di U, e similmente $w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s$.

Quindi $v = u+w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_s w_s$, ossia v è combinazione lineare di $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$.

[redacted] Dunque $V+W \subset \langle u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s \rangle$.

Viceversa, se $v \in \langle u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s \rangle$, allora

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s = u + w$$

con $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r \in V$ e $w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s \in W$.

Dunque $\langle u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s \rangle \subset V+W$.

Ossia $V+W = \langle u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_s \rangle$. $\square$

<u>Esercizio:</u> In $\mathbb{R}^4$, siano $V = \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0) \rangle$ e [redacted]

$W = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,0) \rangle$ due sottospazi. Determinare dei generatori di $V+W$ e dei generatori di $V \cap W$.

<u>Svolgimento:</u> [redacted] Si ha $V+W = \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,0,1,0), (0,1,0,0)$

Troviamo invece dei generatori per $V \cap W$. Intanto determiniamo $V \cap W$. Si ha

$V \cap W = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v \in V \text{ e } v \in W \}$. Dunque $v \in V \cap W$ implica

$$v = \alpha (1,1,0,0) + \beta (0,1,1,0) \quad \text{e} \quad v = \gamma (1,0,1,0) + \delta (0,1,0,0)$$

$$v = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) = \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0,0)$$

per opportuni $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Ed ogni scelta di $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tale che si abbia

$$\alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) = \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0,0)$$

dà un vettore di $V \cap W$ secondo la ricetta

$v = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0)$. Dobbiamo quindi trovare tutte le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$\alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) = \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0,0).$$

Calcolando le combinazioni lineari di ambo i membri dell'uguaglianza otteniamo

$$(\alpha, \alpha+\beta, \beta, 0) = (\gamma, \delta, \gamma, 0)$$

Questa equazione vettoriale è equivalente al sistema di quattro equazioni nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha + \beta = \delta \\ \beta = \gamma \\ 0 = 0 \end{cases}$$

possiamo esprimere tutte le incognite in funzione di γ

ottenendo

$$\alpha = \gamma$$
$$\beta = \gamma$$
$$\delta = 2\gamma$$

γ è libera di variare in $\mathbb{R}$.

Otteniamo quindi

$$V \cap W = \{ (\gamma, 2\gamma, \gamma, 0) \mid \gamma \in \mathbb{R} \} = \{ \gamma(1,2,1,0) \mid \gamma \in \mathbb{R} \}$$

Dunque $V \cap W = \langle (1,2,1,0) \rangle$.

<u>Esercizio</u>: In $M_{2,2}(\mathbb{R})$, siano $V = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ e

$W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$. Determinare dei generatori di $V+W$

e dei generatori di $V \cap W$.

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$, siano $V = \langle X^3+1, X^2+1 \rangle$ e

$V = \langle X^3+X^2, 1 \rangle$. Determinare dei generatori di $V+W$ e dei

generatori di $U \cap W$.

<u>Def</u>: In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, un insieme finito di vettori $\{u_1, \dots, u_k\}$ è detto insieme di vettori linearmente indipendenti se e solo se l'unica combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_k$ che dia il vettore nullo 0_V è la combinazione lineare nulla

$0u_1 + \dots + 0u_k = 0_V$.

ossia

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

Se esiste una combinazione lineare non nulla dei vettori $u_1, \dots, u_k$ che dia il vettore nullo, i vettori $u_1, \dots, u_k$ si dicono linearmente dipendenti.

<u>Esempio</u>: in $\mathbb{R}^2$, i vettori $(1,0), (0,1), (1,-1)$ sono linearmente dipendenti. Infatti si ha

$$1\,(1,0) + (-1)\,(0,1) + (-1)\,(1,-1) = (0,0)$$

<u>Esempio</u>: in $\mathbb{R}^3$, i vettori $(1,0,1), (1,0,2)$ sono linearmente indipendenti. Infatti si ha

$$\lambda\,(1,0,1) + \mu\,(1,0,2) = (0,0,0) \iff \lambda + \mu = 0 \text{ e } \lambda + 2\mu = 0 \iff \lambda = 0, \mu = 0$$

<u>Prop</u>: In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, un insieme finito di vettori $\{u_1, \dots, u_k\}$ è linearmente indipendente se e solo se

ogni combinazione lineare dei vettori $u_1, \dots, u_k$ si scrive in modo unico. Ossia

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1' u_1 + \dots + \lambda_k' u_k \iff \lambda_1 = \lambda_1', \dots, \lambda_k = \lambda_k'.$$

<u>dim</u>. Per definizione, se $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente dipendenti esistono più combinazioni lineari che danno il vettore nullo.

Viceversa, se esistono due combinazioni lineari diverse che danno lo stesso vettore

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = \lambda_1' u_1 + \dots + \lambda_k' u_k$$

allora si ha, portando tutto a primo membro

$$(\lambda_1 - \lambda_1') u_1 + (\lambda_2 - \lambda_2') u_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k') u_k = 0_V$$

e poiché gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non sono tutti uguali agli scalari $\lambda_1', \dots, \lambda_k'$ si ha che gli scalari $(\lambda_1 - \lambda_1'), \dots, (\lambda_k - \lambda_k')$

non sono tutti nulli, ossia i vettori $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente dipendenti. $\square$

<u>Def</u>: In un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, un insieme di vettori $\{u_1, \dots, u_k\}$ si dice una base di V se

(i) $\{u_1, \dots, u_k\}$ è un insieme di generatori di V

(ii) $\{u_1, \dots, u_k\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.