Foglio di esercizi 2

Esercizio 1 Nel piano $\mathbb{R}^2$ mostrare che ogni vettore (x, y) si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v = (1, 2)$ e $w = (-1, 1)$.

Esercizio 2 Si determini se ognuno dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dai vettori (x, y, z) soddisfacenti alle seguenti condizioni sia o no un sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

(a) $x^2 + y^2 = z$

(b) $|x| = |y|$

(c) $x + y = z$

(d) $xy + yz = 0$

(e) $x + y - z + 1 = 0$

(f) $x - y^2 = 0$ e $x = 0$

(g) $x - yz = 0$ e $x = 0$

In ciascuno dei casi disegnare l'insieme in questione.

Esercizio 3 Calcolare somma e intersezione per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

(a) $V =< (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) >$ e $W =< (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0) >$

(b) $V =< (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) >$ e $W =< (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1) >$

Esercizio 4 Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(a, b, c)|2a + 3b - c = 0\}, \qquad W_2 = \{(a, b, c)|a + 2b - c = 0\}$$

(a) Si mostri che W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

(b) Si trovi un vettore $v \in W_1 \cap W_2$, $v \neq 0$

(c) Si mostri che $W_1 \cap W_2 = \{\alpha v | \alpha \in \mathbb{R}\}$

(d) Si mostri che $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

Esercizio 5 Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, w)|x + z = 0, 3y - w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w)|x + z = 0, y + 2w = 0\}$, verificare che sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e determinare $S \cap T$ e $S + T$.

Esercizio 6 Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 0, 1, 1)$, $v_5 = (1, 0, 0, 1)$.

(a) Si dimostri che essi individuano un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$

(b) Per ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ quante combinazioni lineari dei vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 danno quel vettore?

Esercizio 7 Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto alla somma di vettori ma non rispetto al prodotto di un vettore per un numero reale. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso al prodotto di un vettore per un numero reale ma non rispetto alla somma di vettori.

Esercizio 8 Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \; a + d = 0 \right\}$$

(a) Verificare che W è un sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$

(b) Determinare un insieme di generatori di W

(c) Trovare due sottospazi distinti W_1 e W_2 di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $W \cap W_1 = W \cap W_2 = \{0\}$ e $W + W_1 = W + W_2 = M_{2,2}(\mathbb{R})$.