Oss: Il punto (i) del teorema precedente si chiama teorema del completamento ad una base.

Grazie alla nozione di dimensione abbiamo il seguente criterio di uguaglianza di spazi vettoriali.

Prop: Sia $U$ un sottospazio di uno spazio vettoriale $V$. Allora si ha $\dim U \leq \dim V$, e $\dim U = \dim V$ se e solo se $U = V$.

Esercizio: Calcolare la dimensione di $\mathbb{R}^4$ ed esibirne una base.

Svolgimento: $(a,b,c,d) = (a,0,0,0) + (0,b,0,0) + (0,0,c,0) + (0,0,0,d)$

$= a\,(1,0,0,0) + b\,(0,1,0,0) + c\,(0,0,1,0) + d\,(0,0,0,1)$

dunque $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ è un insieme generatore di $\mathbb{R}^4$. Ma si ha anche

$(0,0,0,0) = a\,(1,0,0,0) + b\,(0,1,0,0) + c\,(0,0,1,0) + d\,(0,0,0,1)$

se e solo se $a = b = c = d = 0$, dunque i vettori $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ sono linearmente indipendenti. Dunque $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e si ha $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

Esercizio: Calcolare la dimensione di $\mathbb{R}^n$ ed esibirne una base.

Esercizio: Calcolare la dimensione di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ ed esibirne una base.

Svolgimento: Si ha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$

$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme generatore di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Ma si ha anche

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se $a = b = c = d = e = f = 0$, quindi

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base dello spazio $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, e si ha $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$.

Esercizio: Calcolare $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ed esibire una base di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio: Calcolare la dimensione di $\mathbb{R}^{\leq 2}[X]$ ed esibirne una base.

Svolgimento:

Si ha $a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = a_2 (X^2) + a_1 (X) + a_0 (1)$, dunque l'insieme $\{X^2, X, 1\}$ genera $\mathbb{R}^{\leq 2}[X]$.

Inoltre si ha

$$a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot 1 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad a = b = c = 0.$$

Quindi l'insieme $\{X^2, X, 1\}$ è una base di $\mathbb{R}^{\leq 2}[X]$, e si ha $\dim \mathbb{R}^{\leq 2}[X] = 3$.

Esercizio: Calcolare $\dim \mathbb{R}^{\leq n}[X]$ ed esibire una base di $\mathbb{R}^{\leq n}[X]$.

Abbiamo visto che se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale $V$, allora ogni vettore $v \in V$ si scrive come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ in maniera unica.

<u>Def</u>: Sia $V$ uno spazio vettoriale e $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$. Sia $v \in V$, allora i coefficienti della combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$ che dà $v$ si chiamano coordinate di $v$ rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Ossia se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, allora le coordinate di $v$ rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

<u>Esempio</u>: Le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ sono $(1, 2, -1, 0)$.

Le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono $(1, -1, 1, -1)$.

Le coordinate di un vettore dipendono dalla base scelta.

<u>Oss</u>: Sia $V$ uno spazio vettoriale, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di $V$. Allora l'applicazione che ad un vettore $v$ di $V$ associa le sue coordinate rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una biezione $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Scegliendo una base diversa di $V$ si ottiene una applicazione diversa.