Esercizio: In $\mathbb{R}^4$, trovare le coordinate di $(1,1,-1,3)$ rispetto alla base $\{(1,1,1,1),(0,-1,2,1),(0,0,1,-1),(0,0,0,2)\}$.

Svolgimento: Le coordinate di $(1,1,-1,3)$ rispetto a tale base saranno (a,b,c,d), determiniamo a,b,c,d.

Si deve avere

$$a(1,1,1,1)+b(0,-1,2,1)+c(0,0,1,-1)+d(0,0,0,2)=(1,1,-1,3)$$

Si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} a+0\cdot b+0\cdot c+0\cdot d=1 \\ a-b+0\cdot c+0\cdot d=1 \\ a+2b+c+0\cdot d=-1 \\ a+b-c+2d=3 \end{cases} \quad \text{segue} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-2 \\ d=0 \end{cases}$$

Dunque le coordinate di $(1,1,-1,3)$ rispetto alla base

$\{(1,1,1,1),(0,-1,2,1),(0,0,-1,1),(0,0,0,2)\}$ sono $(1,0,-2,0)$.

<u>Oss</u>: Il sistema lineare incontrato nella risoluzione dell'esercizio era particolarmente semplice poiché in una delle equazioni compariva solo la prima variabile, in un'altra solo la prima e la seconda, e così continuando. Sistemi del genere si chiamano in forma a scala, vedremo che un metodo generale di risoluzione dei sistemi lineari consiste nella riduzione in forma a scala tramite operazioni elementari.

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi

$$V = \langle (1,0,0,1),(0,1,0,0),(2,-3,0,2),(-1,2,0,-1) \rangle$$

$$W = \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_2 - x_4 = 0,\ x_3 = 0 \}$$

(i) Trovare una base di V e una base di W

(ii) Trovare una base di $V \cap W$ e una base di $V+W$

(iii) Completare la base trovata di W ad una base di $V+W$

(iv) Completare la base trovata di V ad una base di $\mathbb{R}^4$.

<u>Svolgimento:</u> Estraiamo dall'insieme generatore

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (2,-3,0,2), (-1,2,0,-1)\}$ ~~una~~ di V una

base di V. Bisogna trovare un sottoinsieme massimale di

vettori linearmente indipendenti.

Il procedimento è il seguente:

- si inizia con un vettore non nullo
- se ne aggiunge un secondo
  - se sono linearmente indipendenti si tiene
  - se sono linearmente dipendenti si cancella
- si aggiunge un altro vettore
  - se questo nuovo insieme è linearmente indipendente si tiene il vettore
  - se questo insieme è linearmente dipendente si cancella l'ultimo vettore aggiunto
- si continua così fino a finire i vettori dell'insieme generatore.

Applichiamo il procedimento all'insieme

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (2,-3,0,2), (-1,2,0,-1)\}$.

- $(1,0,0,1) \neq (0,0,0,0)$
- $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0)\}$ è linearmente indipendente?

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

segue $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

dunque l'insieme è linearmente indipendente.

- $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (2,-3,0,2)\}$ è linearmente indipendente?

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,0,0) + c(2,-3,0,2) = (0,0,0,0)$$

segue $\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b - 3c = 0 \\ 0 = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$

da cui $\begin{cases} a = -2c \\ b = 3c \end{cases}$. Questo sistema ammette soluzioni non nulle, ad esempio

$$(a,b,c) = (-2,3,1).$$

Dunque i tre vettori sono linearmente dipendenti e si cancella l'ultimo.

- $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (-1,2,0,-1)\}$ è linearmente indipendente?

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,0,0) + c(-1,2,0,-1) = (0,0,0,0)$$

segue
$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 0 = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{array}{l} a = c \\ b = -2c \end{array}$$

questo sistema ammette soluzioni non nulle, ad esempio $(a,b,c) = (1,-2,1)$, quindi i vettori sono linearmente dipendenti e si cancella l'ultimo vettore.

- Abbiamo terminato i vettori dell'insieme generatore di V, possiamo concludere che $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0)\}$ è una base di V; $\dim V = 2$.

Troviamo una base di W. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

si ottiene $\begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

dunque

$$W = \{ (x_1, x_2, 0, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,1) \rangle$$

L'insieme $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1)\}$ genera W, poiché i vettori $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,1)$ non sono multipli l'uno dell'altro essi sono linearmente indipendenti, dunque $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1)\}$ è una base di W; $\dim W = 2$.

Troviamo una base di $V \cap W$.

$$V \cap W = \{ a(1,0,0,1) + b(0,1,0,0) \in W \} =$$

$$= \{ (a, b, 0, a) \mid a = b \} = \{ (a, a, 0, a) \} = \langle (1,1,0,1) \rangle$$

Poiché $(1,1,0,1) \neq (0,0,0,0)$ si ha che $\{(1,1,0,1)\}$ è una base di $V \cap W$; $\dim V \cap W = 1$.

Troviamo una base di $V+W$.

$$V+W = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,1) \rangle$$

Estraiamo una base di $V+W$ dall'insieme generatore

$$\{ (1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,1) \}.$$

- Sappiamo che $(1,0,0,1), (0,1,0,0)$ sono lin. ind.

- $(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0)$ sono lin. ind.?

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,0,0) + c(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

segue che $\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ 0=0 \\ a=0 \end{cases}$ da cui si ha $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$

dunque i tre vettori sono lin. ind.

- I vettori $(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,1)$ sono lin. ind.?

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,0,0) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,1) = (0,0,0,0)$$

da cui $\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \\ 0 = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$

segue che $\begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = d \end{cases}$ questo sistema ammette soluzioni non nulle, ad esempio $(a,b,c,d) = (-1,-1,1,1)$

dunque i quattro vettori sono lin. dip.

Possiamo concludere che una base di $V+W$ è

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0)\}$; $\dim V+W = 3$.

Completiamo la base $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1)\}$ di W ad una base di $V+W$. Poiché $\dim V+W = 3$ è sufficiente aggiungere un vettore di $V+W$ che non sia in W all'insieme $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1)\}$. Ad esempio il vettore $(1,0,0,1)$

(si verifica che $(1,0,0,1) \notin \langle (1,0,0,0), (0,1,0,1) \rangle$.

Dunque una base di $V+W$ ottenuta completando la base $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1)\}$ di W è la base

$\{(1,0,0,0), (0,1,0,1), (1,0,0,1)\}$.

Completiamo la base $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Abbiamo visto che $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ è una base di $V+W$ ottenuta completando la base $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ di V.

Dunque è sufficiente per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$ aggiungere un vettore che non appartenga a $V+W$.

Si può scegliere ad esempio $(0,0,1,0)$.

(si verifica che $(0,0,1,0) \notin V+W = \langle (1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0) \rangle$

Quindi una base di $\mathbb{R}^4$ ottenuta completando ~~[illegible]~~ la base $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ di V è

$$\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}.$$