Foglio di esercizi 3

Esercizio 1 Stabilire se i seguenti insieme sono sottospazi di $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ e, nel caso in cui lo siano, calcolarne la dimensione.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 2x+z=0 \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 2x+y+z=0 \text{ e } y-z=0 \right\}$

Esercizio 2 Verificare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ e, nel caso in cui lo siano, calcolarne la dimensione.

(a) $W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \mid p(0) = 0 \right\}$

(b) $W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \mid p(x) \text{ ha grado al più } 1 \right\}$

(c) $W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \text{ della forma } ax+bx^3 \text{ dove } a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $W = \left\{ \lambda(x^2+1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Esercizio 3 Stabilire se i seguenti insieme sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, con m ed n opportuni e, nel caso in cui lo siano, calcolarne la dimensione.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & b \\ a+b & a+b & a+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{11} - a_{12} = 0 \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{11} - a_{12} = 1 \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{11} - a_{12} = 0 \text{ e } a_{11} - a_{12} + a_{23} = 0 \right\}$

(f) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} - 2a_{12} = 0 \text{ e } a_{11} - a_{12} + a_{22} = 0 \right\}$

(g) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = 1 \right\}$

(h) $\left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\}$

(i) $\left\{\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\right\}$

Esercizio 4 Determinare una base dei sottospazi W_1, W_2, $W_1\cap W_2$, W_1+W_2 e le dimensioni di questi sottospazi per le seguenti scelte di W_1 e W_2:

(a) $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y+z=0 \text{ e } y-z=0\}$ e $W_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y=0 \text{ e } y=0\}$

(b) $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \text{ e } z+t=0\}$ e $W_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+z=0 \text{ e } y=0\}$

(c) $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y+z=0 \text{ e } y-z=0\}$ e $W_2=<(1,1,1,1)>$

(d) $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y+z=0 \text{ e } y-z=0\}$ e $W_2=<(1,1,0,0),(1,0,0,0)>$

(e) $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2y+z-t=0\}$ e $W_2=<(1,0,0,0),(1,0,1,2),(1,0,1,0)>$

(f) $W_1=<(1,0,1,0),(1,2,1,2)>$ e $W_2=<(2,0,0,0),(0,0,1,0)>$

Esercizio 5 Determinare una base dei sottospazi W_1, W_2, $W_1\cap W_2$, W_1+W_2 e le dimensioni di questi sottospazi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ per le seguenti scelte di W_1 e W_2:

(a) $W_1=\{aX^3+bX|a,b\in\mathbb{R}\}$ e $W_2=\{\alpha X|\alpha\in\mathbb{R}\}$

(b) $W_1=\{aX^3+bX^2+cX|a,b,c\in\mathbb{R}\}$ e $W_2=\{\alpha X^3+\beta X^2|\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

(c) $W_1=<1,X,X^2>$ e $W_2=<X,X^2,X^3>$

(d) $W_1=<1,X+X^2>$ e $W_2=<1+X,X^2>$

(e) $W_1=<1+2X^2,X+X^3>$ e $W_2=<1+X^2,X^2>$

Esercizio 6 Determinare una base e la dimensione dei sottospazi W_1, W_2, $W_1\cap W_2$, W_1+W_2 dello spazio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ per opportuni m,n, per le seguenti scelte di W_1 e W_2:

(a) $W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ 2a & 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$ e $W_2=\left\{\begin{pmatrix} \alpha-\beta & \beta \\ \gamma & \alpha+\gamma \end{pmatrix} \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$

(b) $W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ 2a & 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$ e $W_2=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}+a_{12}=0 \text{ e } a_{21}=0\right\}$

(c) $W_1=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{11}-a_{12}=0 \ , a_{22}=0 \text{ e } a_{21}+a_{12}+a_{13}=0\right\}$
e $W_2=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{21}=0 \ , a_{23}=0 \text{ e } a_{11}+a_{12}+a_{13}=0\right\}$

(d) $W_1=<\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}>$ e $W_2=<\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}>$

(e) $W_1=<\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}>$ e $W_2=<\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}>$

Esercizio 7 Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Nel primo caso completare ad una base di $\mathbb{R}^3$ e nel secondo caso estrarre una base di $\mathbb{R}^3$:

(a) $S = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$

(b) $S = \{(1,0,0), (0,1,1), (5,1,1)\}$

(c) $S = \{(1,0,0), (5,1,1)\}$

(d) $S = \{(1,1,0), (0,1,1), (5,1,1), (1,2,1)\}$

Esercizio 8 Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Nel primo caso completare ad una base di $\mathbb{R}^4$ e nel secondo caso estrarre una base di $\mathbb{R}^4$:

(a) $S = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$

(b) $S = \{(1,0,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$

(c) $S = \{(1,0,0,0), (0,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$

(d) $S = \{(1,0,0,0), (0,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,1,1), (0,3,0,0)\}$

Esercizio 9 Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Nel primo caso completare ad una base di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ e nel secondo caso estrarre una base di $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$:

(a) $S = \left\{1, x, x^2\right\}$

(b) $S = \{1, x\}$

(c) $S = \left\{x, x^2\right\}$

(d) $S = \left\{1 + x, x, x^2\right\}$

(e) $S = \left\{1, x, x^2, 1 + x\right\}$

(f) $S = \{1, x, 2 + x\}$

(g) $S = \left\{1, x, x^2, 2 - x\right\}$

(h) $S = \left\{2 - x, x, x^2\right\}$

(i) $S = \left\{1, x + x^2, 1 + x + x^2\right\}$

(j) $S = \left\{1, x + x^2, 1 + x - x^2\right\}$

(k) $S = \left\{x + x^2, 1 + x + x^2\right\}$

Esercizio 10 Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Nel primo caso completare ad una base di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ e nel secondo caso estrarre una base di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

(a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 11 Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e siano $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vettori di V.
Siano $W_1 =< w_1, w_2, \ldots, w_n >$ e W_2 sottospazi vettoriali di V.
Dimostrare che $W_1 \subseteq W_2 \iff w_i \in W_2$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Esercizio 12 Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di V.

(a) Dimostrare che $\{v_1, v_2 + \alpha v_1, v_3, \ldots, v_n\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, è una base di V.

(b) Dimostrare che $\{\alpha v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, è una base di V.

(c) Dimostrare che $\{v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_n\}$ è una base di V.

(d) Dimostrare che $\{2v_1, 2v_2, \ldots, 2v_n\}$ è una base di V.

(e) Dimostrare che $\{v_1, v_1 + 2v_2, \ldots, v_1 + 2v_n\}$ è una base di V.

(f) Dimostrare che $\{v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + \ldots + v_n\}$ è una base di V.