<u>Esercizio</u>: In $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

determinare una base di S_1+S_2.

<u>Svolgimento</u>:

Sappiamo che S_1+S_2 è generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Invece di estrarne direttamente una base, applichiamo le operazioni elementari a questi vettori per ottenere un insieme di generatori di S_1+S_2 che sia "più semplice".

Usiamo le operazioni elementari per ottenere un nuovo insieme di generatori tale che solo il primo vettore abbia entrata 11 non nulla.

Al posto del secondo vettore sostituiremo il secondo vettore meno il primo, al posto del quarto vettore sostituiremo il quarto meno il primo, al posto del quinto sostituiremo il quinto meno il primo, al posto del sesto sostituiremo il sesto meno tre volte il primo. Otteniamo il nuovo insieme generatore

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adesso useremo le operazioni elementari per ottenere un nuovo insieme generatore di S_1+S_2 che sia tale che il secondo vettore abbia entrata 12 non nulla mentre dal terzo in poi tale entrata sia nulla.

Prima di ciò, scambiamo il secondo e terzo vettore. Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando le operazioni elementari si ottiene il seguente insieme generatore di S_1+S_2:

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&-5\\2&-1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

dal quarto vettore fino al sesto le entrate 13 e 21 sono zero.

Il quarto vettore ha entrata 22 non nulla, quindi è possibile applicare le operazioni elementari per ottenere un insieme generatore di S_1+S_2 tale che il quinto e sesto vettore abbiano entrata 22 nulla. Si ottiene

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&-5\\2&-1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Possiamo eliminare il sesto vettore poiché uguale al quinto.

Si ottiene l'insieme generatore di S_1+S_2

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&-5\\2&-1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Per come è stato costruito questo insieme generatore di S_1+S_2 è facile verificare che è composto da vettori linearmente indipendenti.

Infatti si ha che

$$a\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&-5\\2&-1&2\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

equivale al sistema

$$\begin{cases} a=0 \\ 3a+b=0 \\ 2a-5c=0 \\ b+2c=0 \\ a-c+d=0 \\ a+b+2c-d+e=0 \end{cases}$$

ma da questo si deduce $a=b=c=d=e=0$.

Ossia i vettori formano una base del sottospazio S_1+S_2; $\dim(S_1+S_2)=5$, $\dim(S_1\cap S_2)=1$,

e si deduce che tale somma non è diretta.

Oss: Scelta la base $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

di $M_{2,3}(\mathbb{R})$, si ha che le coordinate dei vettori della base

trovata di S_1+S_2 sono

$(1,3,2,0,1,1)$, $(0,1,0,1,0,1)$, $(0,0,-5,2,-1,2)$, $(0,0,0,0,1,-1)$, $(0,0,0,0,0,1)$

se formiamo la matrice che ha come righe questi vettori nell'ordine preso si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è in forma a scala.

Questo metodo di riduzione di una matrice ad una matrice in forma a scala tramite operazioni elementari sulle righe si chiama metodo di riduzione di Gauss.

Abbiamo quindi visto come applicare il metodo di riduzione di Gauss per risolvere sistemi lineari e per trovare una base di un sottospazio a partire da un suo insieme di generatori.

Esercizio: Si considerino i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti come

$$U = \langle (1,2,0,-1), (1,1,1,-1), (2,-1,5,-2) \rangle$$

$$V : \begin{cases} 3x + y + z - w = 0 \\ x + y + z + 2w = 0 \\ x - y - z - 5w = 0 \end{cases}$$

a) determinare una base per ognuno dei sottospazi $U, V, U \cap V, U + V$

b) determinare un sistema lineare omogeneo con il minimo numero di equazioni il cui insieme delle soluzioni sia $U \cap V$

c) determinare dei sottospazi U' e V' tali che

$$U \oplus U' = V \oplus V' = U + V$$

d) è possibile che si abbia $U' = V'$? È possibile che si abbia $U' \subset V$ e $V' \subset U$? In quest'ultimo caso si ha sempre una somma diretta $(U \cap V) \oplus (U' \oplus V')$?

Svolgimento:

a) troviamo una base di U.

riduciamo in forma a scala la matrice le cui righe sono i generatori di U.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \end{matrix} \xrightarrow{II-I} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \end{matrix} \xrightarrow{III-2I} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{III-5II} \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Una base di U è $\{(1,2,0,-1), (0,-1,1,0)\}$; $\dim U = 2$.

Troviamo una base di V. Risolviamo il sistema che definisce V riducendolo in forma a scala.

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{II-I} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{III-3I} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -2 & -7 \end{matrix} \xrightarrow{III-II} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Il sistema è equivalente al sistema (che quindi definisce V)

$$\begin{cases} x+y+z+2w=0 \\ 2y+2z+7w=0 \end{cases}$$

esplicitiamo la x e la y che sono le variabili vincolate in termini delle variabili libere z, w

$$\begin{cases} x = -y-z-2w \\ y = -z-\frac{7}{2}w \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}w \\ y = -z-\frac{7}{2}w \end{cases}$$

per [redacted] $(z,w)=(1,0)$ si ottiene $(0,-1,1,0)$

per $(z,w)=(0,2)$ si ottiene $(3,-7,0,2)$

dunque $\{(0,-1,1,0),(3,-7,0,2)\}$ è una base di V; $\dim V=2$

Si noti che $(0,-1,1,0)\in U\cap V$, dunque $\dim(U\cap V)\geq 1$.

Si ha $\dim(U\cap V)=2 \iff U=V$, ma si vede che $(1,2,0,-1)\in U$ ma $(1,2,0,-1)\notin V$ (non soddisfa le equazioni di V)

Dunque $\dim U\cap V=1$ e $U\cap V=\langle(0,-1,1,0)\rangle$, $\{(0,-1,1,0)\}$ è una base di $U\cap V$.

Inoltre, per la formula di Grassmann, $\dim(U+V)=3$.

Poiché si ha $U+V=\langle(1,2,0,-1),(0,-1,1,0),(3,-7,0,2)\rangle$

Si ha che $\{(1,2,0,-1), (0,-1,1,0), (3,7,0,2)\}$ è una base di $U+V$.

b) $U \cap V = \langle (0,-1,1,0) \rangle$

Le equazioni lineari omogenee nelle variabili x, y, z, w sono del tipo $ax + by + cz + dw = 0$. Quelle che sono soddisfatte dai vettori di $U \cap V$ sono quelle che sono soddisfatte da $(0,-1,1,0)$, dunque quelle per cui

$$-b + c = 0 \quad , \text{ ossia } \quad b = c$$

Le variabili libere sono a, c, d.

Per $(a,c,d) = (1,0,0)$ si ottiene $x = 0$

Per $(a,c,d) = (0,1,0)$ si ottiene $y + z = 0$

Per $(a,c,d) = (0,0,1)$ si ottiene $w = 0$

Dunque un sistema con il minimo numero di equazioni per il quale $U \cap V$ sia l'insieme delle soluzioni è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

c) Poiché $\{(1,2,0,-1),(0,-1,1,0),(3,-7,0,2)\}$ è una base

di $U+V$ e che $\{(1,2,0,-1),(0,-1,1,0)\}$ è una base di U

si può prendere $U'=\langle(3,-7,0,2)\rangle$

Poiché $\{(0,-1,1,0),(3,-7,0,2)\}$ è una base di V, si

può prendere $V'=\langle(1,2,0,-1)\rangle$.

d) È possibile che si abbia $U'=V'$. È sufficiente prendere

$U'=V'=\langle v\rangle$ con $v\notin U\cup V$, ad esempio $v=(4,-5,0,1)$.

È possibile che si abbia $U'\subset V$ e $V'\subset U$, ad esempio si prenda

la scelta di U' e V' fatta al punto c).

In questo caso la somma è diretta poiché, presa una

base di U', una base di V' e una di $U\cap V$, la loro unione

è una base di $U+V$.