Oss: Dall'ultima proposizione segue che se $\phi : V \to W$ è un'applicazione lineare si ha $\dim V \geq \dim(\mathrm{Im}\,\phi)$.

Vediamo ora di precisare questa disuguaglianza.

Prop: (Teorema delle dimensioni)

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V, W.

Allora si ha

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\,\phi) + \dim(\ker \phi).$$

(ovviamente quando $\dim V$ è definibile, ossia quando V è finitamente generato).

dim. Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base di $\ker \phi$. Completiamola ad una base di V $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$, con $n = \dim V$.

Allora si ha $\mathrm{Im}\,\phi = \langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_k), \phi(u_{k+1}), \dots, \phi(u_n) \rangle =$

$= \langle \phi(u_{k+1}), \dots, \phi(u_n) \rangle$. Mostriamo che $\phi(u_{k+1}), \dots, \phi(u_n)$ sono linearmente indipendenti. Sia

$\alpha_{k+1}\phi(u_{k+1}) + \dots + \alpha_n \phi(u_n) = 0_W$. Dunque si ha

$\phi(\alpha_{k+1}u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n) = 0_W$, cioè $\alpha_{k+1}u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n$ è un elemento del nucleo di ϕ.

ma poiché $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una base di $\ker\phi$ e

$\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ è una base di V segue che

$\langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle \cap \ker\phi = \{0_V\}$. Dunque si ha

$\alpha_{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n = 0_V$ e quindi, poiché

$u_{k+1}, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti segue

$\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$.

Cioè $\phi(u_{k+1}), \dots, \phi(u_n)$ sono linearmente

indipendenti e quindi si ha $\dim(\operatorname{Im}\phi) = n-k$,

con $n = \dim V$ e $k = \dim(\ker\phi)$, da cui l'asserto. $\square$

<u>Esercizio</u>: Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $(x,y,z) \longmapsto (y-z, -x+z, x-y)$.

Si determini una base di $\ker \phi$ ed una base di $\operatorname{Im} \phi$.

<u>Svolgimento</u>:

Si ha $\ker \phi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x,y,z) = (0,0,0) \}$

Dunque si ha

$(x,y,z) \in \ker\phi \iff (x,y,z)$ soddisfa al sistema lineare

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema. La matrice dei coefficienti di tale sistema è
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

riduciamo tale matrice in forma a scala tramite operazioni elementari sulle righe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema che definisce $\ker\phi$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} -x \quad +z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$

esplicitando x e y in funzione di z si ottiene

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \qquad \text{per } z = 1 \text{ si ottiene } (1,1,1).$$

Dunque $\ker\phi = \langle (1,1,1) \rangle$; $\dim \ker\phi = 1$.

Sappiamo che $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$,

dunque si ha $\operatorname{Im}\phi = \langle \phi(1,0,0), \phi(0,1,0), \phi(0,0,1) \rangle$

Sappiamo dalla formula delle dimensioni che $\dim(\operatorname{Im}\phi) = 2$,

dunque $\phi(1,0,0) = (0,-1,1)$ e $\phi(0,1,0) = (1,0,-1)$ formano

una base di $\operatorname{Im}\phi$ poiché sono linearmente indipendenti.

<u>Oss</u>: Il dominio e il codominio dell'applicazione lineare ϕ dell'esercizio erano entrambi $\mathbb{R}^3$, in tal caso la formula delle dimensioni ci ha detto che poiché il nucleo era non banale l'immagine non era tutto $\mathbb{R}^3$. Questa affermazione è valida più in generale.

<u>Def</u>: Un'applicazione lineare $\phi: V \to V$ il cui dominio e codominio siano uno stesso spazio vettoriale V si dice un endomorfismo di V.

<u>Prop</u>: Sia $\phi: V \to V$ un endomorfismo di V, allora Φ è biettiva se e solo se è iniettiva, se e solo se è suriettiva.

<u>dim</u>. Segue dalla formula delle dimensioni. $\square$

<u>Def</u>: Un'applicazione lineare biettiva $\phi: V \to W$ tra gli spazi vettoriali V e W si dice un isomorfismo di V su W.

Vediamo ora che un'applicazione lineare è individuata dai valori che assume su un insieme generatore del dominio.

Prop: Siano V, W due spazi vettoriali, $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di V. Siano $\phi: V \to W$ e $\psi: V \to W$ due applicazioni lineari tali che si abbia

$$\phi(v_1) = \psi(v_1), \dots, \phi(v_n) = \psi(v_n),$$

allora si ha $\phi = \psi$, ossia $\forall v \in V$, $\phi(v) = \psi(v)$.

dim. Sia $v \in V$, allora per opportuni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ si ha $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Ma allora

$$\phi(v) = \phi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \phi(v_1) + \dots + \alpha_n \phi(v_n) =$$

$$= \alpha_1 \psi(v_1) + \dots + \alpha_n \psi(v_n) = \psi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) =$$

$$= \psi(v). \square$$

Oss: Dato un insieme di generatori $v_1, \dots, v_n$ di V, in generale non è possibile scegliere i valori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ a caso. Se i vettori sono linearmente dipendenti, allora se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$ si deve avere

$$\alpha_1 \phi(v_1) + \dots + \alpha_n \phi(v_n) = 0_W.$$

<u>Prop</u>: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora, comunque si scelgano $w_1, \dots, w_n \in W$, esiste un'unica applicazione lineare $\phi: V \to W$ tale che si abbia $\phi(v_1) = w_1, \dots, \phi(v_n) = w_n$.

<u>dim</u>. L'unicità deriva dalla proposizione precedente, l'esistenza deriva dal fatto che un qualsiasi vettore di V si scrive in maniera unica come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$. □

Vediamo quindi che la scelta di una base del dominio V permette di stabilire una biezione tra le applicazioni lineari da V a W e le n-uple di vettori di W.

Più precisamente, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, un'applicazione lineare $\phi: V \to W$ è completamente individuata dai vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$.

Se ora scegliamo una base $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W, allora sarà possibile scrivere

$$\phi(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$\phi(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\phi(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

Fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W, i numeri $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sono univocamente individuati dall'applicazione lineare $\phi : V \to W$, ed essi individuano univocamente tale applicazione.

<u>Def:</u> Siano V, W due spazi vettoriali, $\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{V}$ una base di V e $\{w_1, \dots, w_m\} = \mathcal{W}$ una base di W.

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare.

La matrice

$$A = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

costruita sopra è detta matrice associata all'applicazione lineare ϕ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ (rispettivamente di V e W).

Quanto visto sopra si può riformulare nella seguente proposizione.

Prop: Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base dello spazio vettoriale W. Allora c'è una biezione tra l'insieme $\mathcal{L}in(V, W)$ e l'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ data da $\phi \longmapsto A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi}$.

Esercizio: Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$\phi(x, y, z) = (y - z, -x + z, x - y)$.

Trovare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

Svolgimento: Sia $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora la matrice $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ sarà una matrice 3×3 avente come colonne in ordine $\phi(1,0,0)$, $\phi(0,1,0)$, $\phi(0,0,1)$. Dunque

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{E},\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$