Esempi di applicazioni lineari.

1. Sia V uno spazio vettoriale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Sia $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione che ad un vettore $v \in V$ associa le sue coordinate nella base $\mathcal{V}$, ossia

$$\text{se} \quad v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \,, \quad \text{allora} \quad \phi(v) = (a_1, \dots, a_n) \,.$$

L'applicazione ϕ è lineare. Infatti, se $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ e $w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$, si ha $v + w = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n$, e dunque

$$\phi(v+w) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$$

cioè

$$\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w) \,.$$

Analogamente si verifica che $\phi(\alpha v) = \alpha \, \phi(v)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Inoltre $\phi(v) = (0, \dots, 0) \Rightarrow v = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$ ossia $v = 0_V$. Dunque $\ker \phi = \{0_V\}$.

Poiché $\dim V = \dim \mathbb{R}^n$, per il teorema delle dimensioni si ha che ϕ è suriettiva (si poteva dedurre la suriettività anche direttamente: $\phi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = (a_1, \dots, a_n)$).

Dunque $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo di V su $\mathbb{R}^n$.

Inoltre si ha [redacted] $\phi(v_1) = (1, 0, \dots, 0)$, ... $\phi(v_n) = (0, \dots, 0, 1)$. Cioè l'immagine tramite ϕ

della base $\mathcal{V}$ è la base canonica $\mathcal{E} = \{(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^n$.

In conclusione, fissare una base $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_n\}$ dello spazio vettoriale V è equivalente a dare un isomorfismo $\phi : V \to \mathbb{R}^n$. La base $\mathcal{V}$ si recupera da ϕ come controimmagine $\phi^{-1}(\mathcal{E})$ della base canonica.

<u>Oss</u>: Se $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo (abbiamo appena visto che ciò equivale a fissare una base di V) e se W è un sottospazio di V, allora $\phi_{|W} : W \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva e dunque, per il teorema delle dimensioni $\dim W = \dim \phi(W)$.

Inoltre, se $u_1,\dots,u_k$ sono dei vettori di V, si ha che $u_1,\dots,u_k$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \dim(\langle u_1,\dots,u_k\rangle) = k$, dunque segue che $u_1,\dots,u_k$ sono lin. ind. se e solo se

$\dim(\langle u_1,\dots,u_k\rangle) = k$ se e solo se $\dim(\phi(\langle u_1,\dots,u_k\rangle)) = k$

se e solo se $\dim(\langle \phi(u_1),\dots,\phi(u_k)\rangle) = k$ se e solo se

$\phi(u_1),\dots,\phi(u_k)$ sono lin. ind.

Morale: Un problema di algebra lineare concernente V è equivalente, fissando una base di V, ad un problema di algebra lineare concernente $\mathbb{R}^n$.

2. Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.

Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Si ha

$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 (1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n (0, \ldots, 0, 1)$

dunque $\phi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \phi(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n \phi(0, \ldots, 0, 1)$.

Sia $\phi(1, 0, \ldots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$,

$\phi(0, 1, 0, \ldots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$, $\ldots$

$\ldots$, $\phi(0, \ldots, 0, 1) = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$,

allora si avrà

$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$ con

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \end{aligned}$$

Le coordinate dell'immagine di un vettore di $\mathbb{R}^n$ tramite un'applicazione lineare ϕ sono espressioni lineari omogenee delle coordinate di quel vettore. Quanto visto si può sintetizzare nella seguente scrittura

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Possiamo identificare lo spazio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ allo spazio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

<u>Oss</u>: Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W, siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ delle basi di V e W rispettivamente. Allora, da quanto visto prima, si hanno due isomorfismi

$$\phi_v : V \to \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \phi_w : W \to \mathbb{R}^m$$

[redacted]

All'applicazione lineare $\phi : V \to W$ corrisponde l'applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definita da $\psi = \phi_w \circ \phi \circ \phi_v^{-1}$.

Il seguente diagramma sintetizza quanto detto:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ \phi_{\mathcal{V}} \downarrow & & \downarrow \phi_{\mathcal{W}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

da quanto visto prima ψ corrisponde ad una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. La matrice A è la matrice associata a ϕ rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ di V e W rispettivamente.

3. Proiezioni

Sia V uno spazio vettoriale, siano U, W sottospazi di V tali che si abbia $V = U \oplus W$. Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in maniera unica come somma $v = u + w$ con $u \in U$, $w \in W$.

L'applicazione $\pi : V \to V$ tale che $\pi(v) = w$ (con $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$) è lineare e si dice proiezione su W lungo U.

4. Simmetrie

Sia $V = U \oplus W$. L'applicazione $\sigma : V \to V$ tale che $\pi(u + w) = u - w$ $(u \in U, w \in W)$ è lineare e si dice simmetria di asse U e direzione W.

<u>Def</u>: Sia $\phi: V \to W$ un' applicazione lineare, si dice rango di ϕ la dimensione dell'immagine di ϕ: $\operatorname{rk}\phi = \dim(\operatorname{Im}\phi)$.

<u>Def</u>: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si dice rango colonne di A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A (pensate come vettori di $\mathbb{R}^m$), ossia la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A. Sarà indicato $\operatorname{rk} A$.

Si dice rango righe di A il massimo numero di righe di A linearmente indipendenti (pensate come vettori di $\mathbb{R}^n$).

Vedremo che il rango righe di A è uguale al rango colonne di A e dunque tale numero può essere chiamato rango di A senza la specifica righe oppure colonne.

<u>Prop</u>: Sia $\phi: V \to W$ un' applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V e W. Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ rispettivamente una base di V e una base di W, e sia A la matrice associata a ϕ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$. Allora si ha

$$\operatorname{rk}\phi = \operatorname{rk} A .$$

<u>dim</u>. Sia $\phi_{\mathcal{W}}: W \to \mathbb{R}^m$ l'isomorfismo dato da $\mathcal{W}$.

allora abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Im}\,\phi) = \dim\left(\Phi_{\mathcal{W}}(\mathrm{Im}\,\phi)\right)$. $\square$

<u>Esercizio</u>: Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione tale che

$$\phi(x,y,z) = (x-y+2z,\ 2x+2z,\ -x+2y-3z,\ y-z).$$

(a) verificare che ϕ è lineare

(b) determinare una base di $\ker\phi$ ed una base di $\mathrm{Im}\,\phi$

(c) Siano $\mathcal{V} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ e

$$\mathcal{W} = \{(1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$$

una base di $\mathbb{R}^3$ ed una base di $\mathbb{R}^4$ rispettivamente.

Determinare la matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi}$ associata a ϕ rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.

(d) determinare $\mathrm{rk}\left(A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi}\right)$.

<u>Svolgimento</u>: (a) Si ha $\phi(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) =$

$$= \big((x_1+x_2)-(y_1+y_2)+2(z_1+z_2),\ 2(x_1+x_2)+2(z_1+z_2),$$

$$-(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)-3(z_1+z_2),\ (y_1+y_2)-(z_1+z_2)\big) =$$

$$= (x_1-y_1+2z_1,\ 2x_1+2z_1,\ -x_1+2y_1-3z_1,\ y_1-z_1)+$$

$$+ (x_2-y_2+2z_2,\ 2x_2+2z_2,\ -x_2+2y_2-3z_2,\ y_2-z_2) =$$

$$= \phi(x_1,y_1,z_1) + \phi(x_2,y_2,z_2).$$

In maniera analoga si verifica $\phi(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha\, \phi(x,y,z)$.

(ii) Si ha $\ker\phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x,y,z) = (0,0,0,0)\}$

dunque si hanno le seguenti equazioni cartesiane per $\ker\phi$

$$\ker\phi : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è
(è la matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

riduciamola in forma a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{IV+I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque si ha

$$\ker\phi : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\ker\phi = \{(x,y,z) \mid -x = z, y = z\} = \langle(-1,1,1)\rangle .$$

$\dim(\ker\phi) = 1$, dunque $\dim(\mathrm{Im}\,\phi) = \mathrm{rk}\,\phi = 2$

Per trovare una base di $\mathrm{Im}\,\phi$ è sufficiente prendere due vettori linearmente indipendenti tra $\phi(1,0,0), \phi(0,1,0), \phi(0,0,1)$.

Questi vettori sono le colonne della matrice

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E}',\phi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

ed $\mathcal{E}' = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

Si ha quindi che ad esempio $\{(1,2,-1,0),(-1,0,2,1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}\,\phi$; $\dim(\mathrm{Im}\,\phi) = 2$.

(c) Si ha $\phi(1,0,0) = (1,2,-1,0)$. Bisogna esprimere tale vettore come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{W}$. Poiché sappiamo esprimere tale vettore come combinazione lineare dei vettori della base canonica $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^4$, esprimiamo i vettori di $\mathcal{E}'$ come combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{W}$.

Si ha

$$(1,0,0,0) = (1,-1,0,0) + (0,1,-1,0) + (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$
$$(0,1,0,0) = (0,1,-1,0) + (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$
$$(0,0,1,0) = (0,0,1,-1) + (0,0,0,1)$$
$$(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$$

Dunque segue che

$$(1,2,-1,0) = 1\cdot(1,-1,0,0) + 3\cdot(0,1,-1,0) + 2\cdot(0,0,1,-1) + 2(0,0,0,1)$$

Analogamente

$$\phi(1,1,0) = (0,2,1,1) = 2(0,1,-1,0) + 3(0,0,1,-1) + 4(0,0,0,1)$$

e

$$\phi(1,1,1) = (2,4,-2,0) = 2(1,-1,0,0) + 6(0,1,-1,0) + 4(0,0,1,-1) + 4(0,0,0,1)$$

Si conclude quindi che

$$A_{v,w,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Si ha $rk\left(A_{v,w,\phi}\right) = rk\,\phi = 2$.