Def: Un sistema lineare di m equazioni nelle incognite $x_1, \dots, x_n$ è il dato seguente

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

i numeri $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti del sistema, i numeri $b_i \in \mathbb{R}$ sono i termini noti del sistema.

Il sistema lineare si dice omogeneo se $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Il sistema può essere espresso nella seguente forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice matrice dei coefficienti del sistema o matrice incompleta del sistema. Il vettore colonna

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \underline{b}$$

si dirà vettore dei termini noti del sistema, e la matrice

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

si dirà matrice completa del sistema.

<u>Esempio</u>: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 \quad\quad + x_3 = 2 \end{cases}$

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Def: Il sistema omogeneo associato ad un sistema di matrice completa $(A|\underline{b})$ è il sistema omogeneo con matrice dei coefficienti A.

Esempio: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 \quad\quad + x_3 = 0 \end{cases}$ è il sistema omogeneo associato al sistema dell'esempio precedente.

Def: Dato un sistema lineare nelle incognite $x_1, \dots, x_n$, un vettore $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$ è soluzione del sistema se le equazioni del sistema sono soddisfatte ponendo $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$.

L'insieme di tutte le soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ sarà denotato $S_{A,\underline{b}}$.

Interpretazione geometrica dei sistemi lineari.

Sia Σ un sistema lineare di m equazioni nelle incognite $x_1, \dots, x_n$, di matrice completa $(A|\underline{b}) \in M_{m,n+1}(\mathbb{R})$.

La matrice dei coefficienti del sistema $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ corrisponde ad un'applicazione lineare

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$ tale che a $(x_1, \dots, x_n)$ associa

il vettore

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Il sistema può quindi essere riformulato come

$$\phi(\underline{x}) = \underline{b} .$$

Dunque l'insieme delle soluzioni del sistema $S_{A,\underline{b}}$ si identifica con la controimmagine tramite ϕ del vettore $\underline{b}$:

$$S_{A,\underline{b}} = \phi^{-1}(\underline{b}) .$$

Abbiamo già studiato tali controimmagini:

(i) $S_{A,\underline{b}} = \emptyset$ se $\underline{b} \notin \mathrm{Im}\,\phi$

(ii) se $\underline{b} \in \mathrm{Im}\,\phi$, si ha $S_{A,\underline{b}} = \underline{a} + \ker \phi$

dove $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ è una soluzione del sistema Σ.

Possiamo riformulare quanto detto sopra in termini di $(A|\underline{b})$:

Teorema: (Teorema di Rouché-Capelli)

Dato un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, esso ammette soluzione se e solo se

$$rk(A) = rk(A|\underline{b}),$$

cioè se il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta. Nel caso di uguaglianza, una soluzione generale del sistema lineare sarà data da una soluzione particolare del sistema lineare più la soluzione generale del sistema omogeneo associato:

$$S_{A,\underline{b}} = \underline{v} + \ker A \quad , \text{ dove } \underline{v} \in S_{A,\underline{b}}.$$

Inoltre $\dim(\ker A) = n - rk A$.

Si ha che $S_{A,\underline{b}}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\underline{b} = 0_{\mathbb{R}^m}$, ossia se il sistema è omogeneo.

Esempio: $rk \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

dunque il sistema del primo esempio è compatibile, ossia ammette soluzioni, e ammette soluzione unica: $\ker A = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

In generale, se $A\underline{x}=\underline{b}$ è un sistema quadrato, ossia con tante equazioni quante le incognite $\left(A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\right)$, allora se A è di rango massimo, ossia $\operatorname{rk} A = n$, il sistema è risolubile ed ammette un'unica soluzione.

<u>dim.</u> Segue dallo studio di $\phi^{-1}(\underline{b})$, notando che $\underline{b} \in \operatorname{Im}\phi$ se e solo se $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A|\underline{b})$ e che $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim(\ker\phi) + \dim(\operatorname{Im}\phi)$.

<u>Esercizio</u>: Trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

<u>Svolgimento</u>: La matrice completa $(A|\underline{b})$ del sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

riduciamola in forma a scala tramite operazioni elementari sulle righe.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

B

La matrice è in forma a scala; non essendoci uno scalino nella colonna dei termini noti si ha che il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta, quindi il sistema è risolubile. Il rango della matrice incompleta è pari al numero di scalini ossia tre. Si ottiene il sistema equivalente al sistema dato

[redacted]

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 - 3x_4 = -2 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Le variabili libere sono la sola x_2. Si ottiene una soluzione particolare del sistema ponendo $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= -1 \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, -1, 0) \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Cerchiamo la soluzione generale dell'omogenea associata

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = 1$ si ottiene $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 1, 0, 0)$

Dunque $S_{A,\underline{b}} = (0,0,-1,0) + \langle (-2,1,0,0) \rangle$.

Il metodo di risoluzione di un sistema lineare è quello di ridurlo tramite operazioni elementari sulle righe ad un sistema equivalente in forma a scala.

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice sono:

(i) moltiplicare una riga per uno scalare non nullo

(ii) sommare ad una riga un'altra moltiplicata per uno scalare

(iii) scambiare due righe

Def: Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice in forma a scala se:

- le righe che contengono solo zeri sono le ultime
- in ogni riga non nulla il primo elemento non nullo compare più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è in forma a scala.

Abbiamo visto che vale il seguente teorema.

<u>Teorema</u>: (Teorema di riduzione di Gauss)

Ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ può essere ridotta in forma a scala tramite operazioni elementari sulle righe.

<u>dim</u>. Abbiamo visto come procedere per ridurre in forma a scala una matrice usando le operazioni elementari sulle righe. Tale metodo di riduzione si chiama metodo di riduzione di Gauss. $\square$

<u>Esercizio</u>: Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente come matrice associata alla base canonica la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ \lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali tale endomorfismo è iniettivo.

b) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare il nucleo e l'immagine di tale endomorfismo.

c) Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema lineare

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, [redacted] le soluzioni del sistema

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$