Foglio di esercizi 5

Esercizio 1 Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da
$\phi(x, y, z, w) = (x + y + 2z, y - z + w, 2x + y - w)$.

(a) Verificare che ϕ è lineare.

(b) Trovare una base di $\ker\phi$ ed una base di $\mathrm{Im}\phi$.

(c) Trovare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$ del dominio e $\{(1, 2, 1), (-1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ del codominio.

(d) Esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\dim(\phi(W)) = \dim(W)$? In caso affermativo esibirne uno di dimensione massima.

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^3$, si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (3, 0, -1)$, $v_4 = (0, 1, -1)$.

(a) Dire per quali valori di k reale esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\phi(v_1) = (1, 0, k, 0)$, $\phi(v_2) = (1, 1, 0, 0)$, $\phi(v_3) = (-1, k - 3, 2 - k, 1 - k)$, $\phi(v_4) = (2, k + 1, 0, 0)$.

(b) Per tali valori calcolare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Calcolare il rango di ϕ.

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y - z + w = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V =< (1, -1, 1, -1), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1) > .$$

(a) Dire per quali valori di k reale esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\ker\phi = U$, $\phi(1, -1, 1, -1) = (2, 1)$, $\phi(1, 0, -1, 0) = (-2, -k)$, $\phi(0, 0, 1, 1) = (1, k)$. Quante ne esistono?

(b) Trovare la matrice A associata ad una tale ϕ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Determinare il rango di A.

(d) Calcolare $\phi^{-1}(\{(1, 2)\})$.

Esercizio 4 In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x + 2y - z - 2w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad V =< (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) > .$$

(a) Scrivere la matrice rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio (ossia $\mathbb{R}^4$) della proiezione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lungo U su V.

(b) Scrivere la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di asse U e direzione V.

Esercizio 5 Sia A_k la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & 1 \\ -1 & -k & -3 \\ k & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

(a) Dire per quali valori di k la matrice A_k ha rango 3.

(b) Per i valori di k per cui A_k non ha rango 3, determinare $\ker A_k$ e $\mathrm{Im} A_k$.

(c) Per $k = 0$, determinare $A_0^{-1}(\{(1, 0, 0)\})$.

(d) Per i valori di k per i quali A_k non ha rango 3, determinare $A_k^{-1}(\{(2, -4, 5)\})$.

Esercizio 6 In $\mathbb{R}^{\leq 4}[x]$, si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{R}^{\leq 4}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 4}[x]$ tale che $\phi(P(x)) = \frac{d}{dx}P(x)$ (ad esempio $\phi(x^4 + 2x^2) = 4x^3 + 4x$).

(a) Verificare che ϕ è lineare.

(b) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di ϕ.

(c) Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ sia nel dominio che nel codominio.

Esercizio 7 Sia $\phi : \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ l'applicazione tale che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} & a_{21} + a_{22} \\ a_{31} + a_{32} & a_{31} + a_{32} \end{pmatrix}$$

(a) Verificare che ϕ è lineare.

(b) Determinare una base del nucleo ed una base dell'immagine di ϕ.

(c) Determinare un sottospazio W di $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ tale che $\phi(W) = \mathrm{Im}\phi$ e $\dim(W) = \mathrm{rk}\phi$.

(d) Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alla base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di dominio e codominio.