Siano V, W, Z degli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali e siano $g: V \to W$, $f: W \to Z$ due applicazioni lineari. Possiamo considerare la composizione $f \circ g: V \to Z$ di queste applicazioni (se $v \in V$, allora si ha $(f \circ g)(v) = f(g(v))$).

<u>Prop</u>: L'applicazione $f \circ g: V \to Z$ è lineare se $f: W \to Z$ è lineare e se $g: V \to W$ è lineare.

<u>dim.</u> Siano $v_1, v_2 \in V$. Si ha $(f \circ g)(v_1 + v_2) = f(g(v_1 + v_2)) =$
$= f(g(v_1) + g(v_2)) = f(g(v_1)) + f(g(v_2)) = (f \circ g)(v_1) +$
$+ (f \circ g)(v_2)$.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $v \in V$, allora si ha $(f \circ g)(\alpha v) =$
$= f(g(\alpha v)) = f(\alpha g(v)) = \alpha f(g(v)) = \alpha (f \circ g)(v)$. $\square$

Dunque vediamo che la composizione di funzioni definisce un'applicazione

$$\mathcal{L}in(W, Z) \times \mathcal{L}in(V, W) \to \mathcal{L}in(V, Z)$$

data da

$$(f, g) \longmapsto f \circ g$$

Vediamo ora come si traduce la composizione di applicazioni lineari in termini di matrici associate rispetto a delle basi di V, W, Z.

Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$, $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_p\}$

delle basi degli spazi V, W, Z rispettivamente.

Sia $A = A_{\mathcal{W},\mathcal{Z},f}$ la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{W}, \mathcal{Z}$; sia $B = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},g}$ la matrice associata a g rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$; sia $C = A_{\mathcal{V},\mathcal{Z},f\circ g}$ la matrice associata ad $f\circ g$ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{Z}$.

Allora si ha:

<u>Prop</u>: Se $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, si ha

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} .$$

<u>dim.</u>

Per definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a delle basi si ha, poiché $C = A_{\mathcal{V},\mathcal{Z},f\circ g}$,

$$(f\circ g)(v_k) = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} z_i$$

Ma si ha $(f\circ g)(v_k) = f(g(v_k)) = f\left(\sum_{j=1}^{m} b_{jk} w_j\right) =$

$$= \sum_{j=1}^{m} b_{jk} f(w_j) = \sum_{j=1}^{m} b_{jk} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} z_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) z_i$$

Dunque si ha $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$. $\square$

<u>Def</u>: Date due matrici $A \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, si definisce il prodotto righe per colonne $AB \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice $AB = (c_{ik})$, con

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \qquad \Big(A = (a_{ij}),\ B = (b_{jk}) \Big).$$

<u>Oss</u>: La proposizione dimostrata si può riformulare dicendo che, fissate le basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ degli spazi vettoriali V, W, Z, alla composizione $f \circ g : V \to Z$ delle applicazioni lineari $f : W \to Z$ e $g : V \to W$ corrisponde la matrice AB, prodotto righe per colonne delle matrici $A = A_{\mathcal{W},\mathcal{Z},f}$ e $B = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},g}$.

<u>Esercizio</u>: Siano A e B le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice AB.

Svolgimento:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oss: Il prodotto BA non è definito poiché il numero di colonne di B è diverso dal numero di righe di A.

Anche nei casi in cui siano definite sia AB che BA, in generale si ottengono matrici diverse.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad BA = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anche nel caso in cui le matrici vengano delle stesse dimensioni, in generale si ha $AB \neq BA$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss: Sia Σ un sistema lineare di matrice completa $(A|\underline{b}) \in M_{m,n+1}(\mathbb{R})$ nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$, allora, se $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, ha senso l'equazione matriciale

$$A\,\underline{x} = \underline{b} \,,$$

cioè

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

che dà esattamente il sistema di matrice completa $(A|\underline{b})$.

Consideriamo ora un isomorfismo $f: V \to W$, allora ha senso considerare l'applicazione inversa $f^{-1}: W \to V$.

Prop: $f^{-1}: W \to V$ è lineare se $f: V \to W$ è lineare.

dim. Siano $w_1, w_2 \in W$. Allora $f^{-1}(w_1 + w_2)$ e $f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$ sono mandati tramite f in $f(f^{-1}(w_1 + w_2)) = w_1 + w_2$ e

$$f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)) = f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)) = w_1 + w_2 .$$

Ma f è biettiva, dunque iniettiva, quindi $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$. Analogamente per $f^{-1}(\alpha w)$. $\square$

Fissiamo ora delle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ di V e W rispettivamente.

Vediamo che relazione hanno $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}$ e $A_{\mathcal{W},\mathcal{V},f^{-1}}$.

<u>Def</u>: $I_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sia la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ossia, le entrate sulla diagonale principale sono 1, le altre entrate della matrice I_n sono 0.

<u>Prop</u>: Se $A = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $B = A_{\mathcal{W},\mathcal{V},f^{-1}} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

allora si ha $AB = I_n = BA$.

<u>dim</u>. Sappiamo che $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}\, A_{\mathcal{W},\mathcal{V},f^{-1}} = A_{\mathcal{W},\mathcal{W},f\circ f^{-1}}$.

Se $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$, si ha $f \circ f^{-1}(w_i) = w_i$, dunque

$$A_{\mathcal{W},\mathcal{W},f\circ f^{-1}} = I_n \quad . \square$$

<u>Def</u>: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che si abbia $AB = I_n$. La matrice B si dice inversa di A e si denota A^{-1} (si dimostra che tale matrice inversa è unica).