Prop: Una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se è la matrice associata ad un isomorfismo [redacted]. [redacted]

Prop: Una matrice quadrata [redacted] $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $rk\, A = n$.

dim. Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è A; $rk\, A = n$ implica f suriettiva, dunque iniettiva, e quindi biettiva. f biettiva implica A invertibile per la proposizione precedente. Viceversa, se A è invertibile, per la proposizione precedente si ha f biettiva, dunque suriettiva. Ciò implica che il rango di A è n. $\square$

Vediamo come calcolare l'inversa di una matrice quadrata invertibile.

Prop: $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ridotta in forma a scala ha n pivot.

dim. Il numero di pivot di una matrice ridotta in forma a scala è uguale al rango di tale matrice. $\square$

<u>Prop:</u> Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se si può ridurre la matrice A tramite operazioni elementari sulle righe alla matrice I_n.

<u>Esempio:</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$rk\, A = 2$, dunque A è invertibile. Riduciamo A all'identità I_2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I + II} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metodo di calcolo dell'inversa di una matrice

<u>Esempio:</u> $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

- $(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

riduciamo A a I_2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II - 2I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I + II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

In generale, se $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, per calcolare l'inversa (qualora esista) si forma la matrice $(A \mid I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$,

si opera sulle righe di tale matrice riducendo A a I_n.

Si otterrà la matrice $(I_n \mid A^{-1}) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$.

<u>Esempio</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcoliamo A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}-\mathrm{III}]{\mathrm{II}-2\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dunque $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Interpretazione delle operazioni elementari sulle righe di una matrice come prodotto per una matrice.

<u>Esempio</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) scambio di prima e seconda riga

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) moltiplicazione della seconda riga per 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) addizionare alla terza riga due volte la seconda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

In generale si vede che le operazioni elementari sulle righe di una matrice si ottengono moltiplicando a sinistra la matrice per opportune matrici quadrate aventi lo stesso numero di righe della matrice in questione.

Se A è invertibile, allora è riducibile all'identità I_n tramite operazioni elementari sulle righe. Dunque, da questa discussione risulta che esistono k matrici quadrate $n \times n$

$A_1, \ldots, A_k$ tali che $A_k \cdot A_{k-1} \cdot \ldots \cdot A_1 \cdot A = I_n$.

Allora si ha $A_k A_{k-1} \ldots A_1 = A^{-1}$.

Dunque

$$A_k A_{k-1} \ldots A_1 \left(A \mid I_n \right) = \left(I_n \mid A_k A_{k-1} \ldots A_1 \right) =$$

$$= \left(I_n \mid A^{-1} \right).$$

Questa è la giustificazione del metodo di calcolo dell'inversa ora esposto.

Esercizio: In $\mathbb{R}^3$, consideriamo i vettori $v_1 = (2,0,1)$, $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = (1,-2,1)$, $v_4 = (0,1,1)$, $v_5 = (1,-1,2)$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, esiste un'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f_k(v_1) = (1,k,0),\quad f_k(v_2) = (k,1,0),\quad f_k(v_3) = (k^2-k,\, k-k^2$$

$$f(v_4) = (0,0,0),\quad f(v_5) = (2,\, k-1,\, 0).$$

(b) Per tali valori di k, determinare la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica.

(c) per tali valori di k, determinare la matrice associata a f_k rispetto alla base
$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(2,1,0),(0,1,1)\}$ del dominio e la base canonica del codominio.

(d) per tali valori di k, determinare $f_1^{-1}(2,-2,0)$.

Svolgimento:

Sappiamo che i valori di un'applicazione lineare su un insieme di vettori linearmente indipendenti del dominio possono essere specificati a piacere; e se tali vettori del dominio formano una base del dominio, allora l'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su tali vettori.

Estraiamo dunque dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base di $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$.

$v_1 = (2,0,1)$ e $v_2 = (1,2,0)$ sono linearmente indipendenti

$v_3 = (1,-2,1) = (2,0,1) - (1,2,0) = v_1 - v_2$, dunque v_1, v_2, v_3 sono lin. dip.

$v_1, v_2, v_4 = (0,1,1)$ si verifica che sono lin. ind., dunque $\{v_1, v_2, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. E si ha $v_5 = (1,-1,2) = (0,1,1) + (1,-2,1)$, quindi $v_5 = v_1 - v_2 + v_4$.

Sia $\phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ tale che $\phi_k(v_1) = (1,k,0)$, $\phi_k(v_2) = (k,1,0)$, $\phi_k(v_4) = (0,0,0)$.

Troviamo per quali k, si ha

$\phi_k(v_3) = (k^2-k, k-k^2)$ e $\phi_k(v_5) = (2, k-1, 0)$.

$$\phi_k(v_3) = \phi_k(v_1 - v_2) = \phi_k(v_1) - \phi_k(v_2) = (1,k,0) - (k,1,0) =$$

$$= (1-k,\, k-1,\, 0).$$

Dunque si ha $\phi_k(v_3) = (k^2-k,\, k-k^2,\, 0)$ se e solo se

$$(k^2-k,\, k-k^2,\, 0) = (1-k,\, k-1,\, 0)$$

ossia se e solo se $k^2-1=0$, cioè per $k=\pm 1$.

Inoltre $\phi_k(v_5) = \phi_k(v_1 - v_2 + v_4) = (1-k,\, k-1,\, 0)$.

Dunque si ha $\phi_k(v_5) = (2,\, k-1,\, 0)$ se e solo se

$(1-k,\, k-1,\, 0) = (2,\, k-1,\, 0)$, cioè se e solo se $k=-1$.

L'unico valore di k per cui queste due condizioni sono soddisfatte contemporaneamente è $k=-1$.

Dunque $k=-1$ è l'unico valore di k per cui esiste f_k lineare con le proprietà richieste e si ha $f_{-1} = \phi_{-1}$.

La matrice associata ad f_{-1} rispetto alla base canonica avrà come colonne i vettori

$f_{-1}(1,0,0)$, $f_{-1}(0,1,0)$, $f_{-1}(0,0,1)$.

Si ha $(1,0,0) = \frac{1}{5}(2v_1 + v_2 - 2v_4)$, dunque

$$f_{-1}(1,0,0) = \frac{1}{5}\left(2f_{-1}(v_1) + f_{-1}(v_2) - 2f_{-1}(v_4)\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$$

Si ha $(0,1,0) = -\frac{1}{5}(v_1 - 2v_2 - v_4)$, dunque

$$f_{-1}(0,1,0) = -\frac{1}{5}\left(f_{-1}(v_1) - 2f_{-1}(v_2) - f_{-1}(v_4)\right) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

Si ha $(0,0,1) = \frac{1}{5}(v_1 - 2v_2 + 4v_4)$, dunque

$$f_{-1}(0,0,1) = \frac{1}{5}\left(f_{-1}(v_1) - 2f_{-1}(v_2) + 4f_{-1}(v_4)\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-3}{5}, 0\right).$$

Dunque

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f_{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associata ad f_{-1} rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e la base $\mathcal{E}$ del codominio ha come colonne i vettori

$f_{-1}(1,1,1)$, $f_{-1}(2,1,0)$, $f_{-1}(0,1,1)$, dunque

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{E},f_{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per trovare $f_{-1}^{-1}(2,-2,0)$ è sufficiente trovare un vettore del dominio la cui immagine tramite f_{-1} sia $(2,-2,0)$ e calcolare $\ker f_{-1}$. Sappiamo che $f_{-1}(v_5) = (2,-2,0)$ e inoltre

$\ker f_{-1} = \langle (3,1,0), (0,1,1) \rangle$.

Dunque $f_{-1}^{-1}(2,-2,0) = (1,-1,2) + \langle (3,1,0), (0,1,1) \rangle$.