Esercizio: Sia $U = \langle (1,0,1), (1,-1,0) \rangle$ e sia $V = \langle (0,1,-1) \rangle$.

(a) Verificare che si ha $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

(b) Determinare la matrice [redacted] associata alla simmetria $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse U e direzione V rispetto alla base
$$\{(1,0,1), (1,-1,0), (0,1,-1)\}.$$

Svolgimento:

(a) Poiché $\dim U = 2$ e $\dim V = 1$, dalla formula di Grassmann discende che si ha $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ se e solo se $U \cap V = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Il sottospazio U è definito dall'equazione $x+y-z=0$. Il vettore $(0,1,-1)$ non soddisfa tale equazione, quindi si ha $V \cap U = \{(0,0,0)\}$. E dunque $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

(b) Dalla definizione di σ si ha:

- $\forall u \in U$, $\sigma(u) = u$
- $\forall v \in V$, $\sigma(v) = -v$.

Dunque $\sigma((1,0,1)) = (1,0,1)$, $\sigma((1,-1,0)) = (1,-1,0)$ e

$\sigma((0,1,-1)) = -(0,1,-1) = (0,-1,1)$.

Da cui si deduce che la matrice associata a σ nella base $\{(1,0,1), (1,-1,0), (0,1,-1)\}$ è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oss: La matrice di σ rispetto a questa base ha una forma molto semplice (è diagonale); la matrice di σ rispetto ad un'altra base (ad esempio la canonica) è in generale molto meno semplice.

Sorgono spontanei i seguenti problemi:

<u>Pb 1</u>: Dato un endomorfismo $\varphi : V \to V$ di uno spazio vettoriale V, trovare una base di V rispetto alla quale l'endomorfismo φ abbia matrice la più semplice possibile (ad es. [redacted] diagonale).

Fissando delle coordinate [redacted] per V, il problema 1 diventa

<u>Pb 1'</u>: Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, trovare una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ simile ad A (ossia $B = H^{-1} A H$ con H invertibile) che abbia una forma la più semplice possibile (ad es. [redacted] diagonale).

Daremo delle risposte parziali ai suddetti problemi, la risposta completa a tali problemi è la teoria della forma canonica di Jordan.

La risposta parziale che daremo ci permetterà inoltre di dare una risposta parziale al seguente problema.

<u>Pb 2</u>: Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, determinare se sono simili oppure no (ossia se esiste $H \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile tale che si abbia $B = H^{-1} A H$).

<u>Oss</u>: La risposta parziale ai suddetti problemi è la teoria della diagonalizzazione.

Diamo la definizione di autovalore ed autovettore di un endomorfismo.

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale, $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di V. Un numero reale λ si dirà autovalore di φ se esiste un vettore $v \in V$ nonnullo tale che $\varphi(v) = \lambda v$.

Il vettore v si dirà autovettore di φ relativo all'autovalore λ.

<u>Def</u>: Se λ è un autovalore dell'endomorfismo $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, si denota V_λ l'insieme di tutti i $v \in V$ t.c. $\varphi(v) = \lambda v$.

(ossia V_λ è il sottoinsieme di V i cui elementi sono gli autovettori di φ relativi all'autovalore λ, e il vettore nullo.)

<u>Prop</u>: Sia $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora si ha:

(i) $V_\lambda \neq \{0_V\}$ se e solo se λ è un autovalore di φ.

(ii) V_λ è un sottospazio di V.

<u>dim.</u>

(i) Per definizione di autovalore.

(ii) Si ha $V_\lambda = \{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v \} = \{ v \in V \mid \varphi(v) - \lambda v = 0_V \}$

Ma quindi $V_\lambda = \{ v \in V \mid (\varphi - \lambda \, id_V)(v) = 0_V \}$,

ossia $V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \, id_V)$, e dunque è un sottospazio. $\square$

Oss: Se λ è un autovalore di $\varphi \in End(V)$, il sottospazio V_λ si dice autospazio di φ relativo all'autovalore λ.

Esempio:

(i) $V_0 = \ker \varphi$, ossia, i vettori non nulli del nucleo di φ sono autovettori di φ relativi all'autovalore 0.

(ii) Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora $(1,1)$ è autovettore di φ relativo all'autovalore 3. Infatti $\varphi((1,1)) = (3,3) = 3(1,1)$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Dato un endomorfismo φ di uno spazio vettoriale vediamo come calcolare gli autovalori e gli autospazi di φ.

Abbiamo visto che λ è autovalore di φ se e solo se $V_\lambda \neq \{0_V\}$, dunque se e solo se $\ker(\varphi - \lambda\, id_V) \neq \{0_V\}$, ossia se e solo se $\varphi - \lambda\, id_V$ non è iniettivo; e quindi se e solo se $\varphi - \lambda\, id_V$ non è invertibile.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice associata a φ rispetto ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, $A - \lambda I_n$ è la matrice associata a $\varphi - \lambda\, id_V$ nella base $\mathcal{V}$.

E si ha $\varphi - \lambda\, id_V$ non è invertibile $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Concludendo si ha

λ è autovalore di $\varphi \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

dove A è la matrice associata a φ rispetto ad una base di V.

Possiamo riformulare questo risultato introducendo il polinomio caratteristico di un endomorfismo.

Def: Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice associata a φ rispetto ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V.

Si chiamerà polinomio caratteristico di φ il polinomio

$P(t) = \det(A - tI_n)$.

Prop: Il polinomio caratteristico di un endomorfismo $\varphi : V \to V$ non dipende dalla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ scelta.

dim.

Sia B ~~una~~ la matrice associata a φ rispetto ad un'altra base $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ di V. Si ha $B = H^{-1}AH$ per una certa $H \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile. Dunque si ha

$\det(B - tI_n) = \det(H^{-1}AH - tI_n) = \det\left(H^{-1}(A - tI_n)H\right) =$

$\det(H^{-1}) \det(A - tI_n) \det(H) = \det(A - tI_n)$. $\square$

Si può quindi riformulare il risultato ottenuto come segue:

<u>Prop</u>: Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, $P(t)$ il suo polinomio caratteristico. Allora si ha che

λ è autovalore di φ se e solo se λ è radice di $P(t)$.

<u>Esempio</u>: Il polinomio caratteristico di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix}\right) = (2-t)^2 - 1 =$$

$$= t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$$

Dunque gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sono 1 e 3.

Calcoliamo gli autospazi relativi a questi autovalori.

$$V_1 = \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \langle (1,-1) \rangle .$$

$$V_3 = \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \langle (1,1) \rangle .$$

Notiamo che $\{(1,-1), (1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, e che in tale base l'endomorfismo rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica ha matrice associata $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.