(

Oss: Nell'esempio della lezione precedente si aveva $V_1 \oplus V_3 = \mathbb{R}^2$, ossia gli autospazi erano in somma diretta e sommavano a tutto lo spazio. Questa è la situazione ideale, non sempre sarà così.

Esercizio: Determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente matrice rispetto alla base canonica la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento:

Polinomio caratteristico: $P(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 0 & -t \end{pmatrix} = (2-t)(t^2+1)$.

Le radici complesse di tale polinomio sono $2, i, -i$, dunque $P(t)$ ha un'unica radice reale, ossia 2.

L'endomorfismo ha un unico autovalore reale: 2

autospazio:

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0) \rangle .$$

Oss: Sui numeri complessi ci sarebbero stati anche gli autovalori $i, -i$ e gli autospazi $V_i = \langle (1,0,i) \rangle$, $V_{-i} = \langle (1,0,-i) \rangle$.

E si avrebbe $\mathbb{C}^3 = V_2 \oplus V_i \oplus V_{-i}$

Oss: Anche quando tutte le radici del polinomio caratteristico sono reali non è detto che gli autospazi sommino a tutto lo spazio.

<u>Esercizio</u>: Sia $\varphi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare autovalori ed autospazi di φ.

(b) Esiste una base di autovettori di φ?

<u>Svolgimento</u>:

Polinomio caratteristico:

$$P(t) = \det(A - tI_4) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2(t-1)(t-3)$$

Quindi gli autovalori di φ sono $1, 2, 3$.

Autospazi:

$$V_1 = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1,0) \rangle$$

$$V_2 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0,0) \rangle$$

$$V_3 = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (0,1,1,0) \rangle$$

Non può esistere una base di autovettori di φ poiché $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \neq \mathbb{R}^4$, infatti $\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) = 3$.

In generale la somma degli autospazi non è tutto lo spazio, tuttavia gli autospazi saranno sempre in somma diretta.

<u>Prop</u>: Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Allora si ha

(i) gli autovalori di φ sono in numero minore o uguale alla dimensione di V;

(ii) se $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sono gli autovalori (distinti) di φ e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ i relativi autospazi, si ha

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$ (gli autospazi sono in somma diretta).

<u>dim</u>.

Dimostriamo che $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ sono in somma diretta. Siano $v_1 \in V_{\lambda_1}$ e $v_2 \in V_{\lambda_2}$ non nulli e siano $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V$.

Dimostriamo che $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Si ha $(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0_V$

Dunque si ha $\alpha_1 (\varphi(v_1) - \lambda_1 v_1) + \alpha_2 (\varphi(v_2) - \lambda_1 v_2) = 0_V$, ossia $\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0_V$. Quindi, poiché $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$ e $v_2 \neq 0_V$, si ha $\alpha_2 = 0$. Segue da ciò che $\alpha_1 = 0$, poiché $v_1 \neq 0_V$.

Il caso generale si tratta analogamente, ragionando per induzione ed applicando $\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V$ a $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$. □

Abbiamo visto non sempre la somma diretta degli autospazi dà tutto lo spazio. Può succedere che

(i) il polinomio caratteristico abbia radici non reali

(ii) gli autospazi non siano abbastanza grandi

Formalizziamo il significato di (ii) e mostriamo che se gli inconvenienti (i) e (ii) non succedono allora la somma diretta degli autospazi è tutto lo spazio.

<u>Def</u>: Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo e sia λ un autovalore di φ. Sia $P(t)$ il polinomio caratteristico di φ. Allora

(i) si definisce molteplicità geometrica dell'autovalore λ la dimensione $\dim V_\lambda$ dell'autospazio relativo all'autovalore λ.

(ii) si definisce molteplicità algebrica dell'autovalore λ la molteplicità di λ come radice di $P(t)$ (ossia la potenza a cui è elevato $(t-\lambda)$ nella decomposizione di $P(t)$ in fattori irriducibili.

<u>Esempio</u>: Se $P(t) = (2-t)^2 (t-1)(t-3)$,

l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 1
l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2
l'autovalore 3 ha molteplicità algebrica 1 .

<u>Prop</u>: Sia $\varphi: V \to V$ un endomorfismo di V e λ un autovalore di φ. Allora la molteplicità geometrica di λ è minore o uguale alla molteplicità algebrica di λ.

<u>dim</u>. omessa
$\square$

<u>Prop</u>: Sia $\varphi: V \to V$ un endomorfismo di V, $P(t)$ il suo polinomio caratteristico. Supponiamo che

(i) $P(t)$ abbia tutte le radici reali

(ii) per ogni autovalore λ di φ, la molteplicità geometrica di λ è uguale alla molteplicità algebrica di λ.

Allora la somma degli autospazi di φ è tutto lo spazio V.

<u>dim.</u>

Il polinomio $P(t)$ ha grado $n = \dim V$.

Dunque se ha tutte radici reali si ha $P(t) = a(t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$

con $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Se per ogni autovalore λ_i si ha che la molteplicità geometrica ~~algebrica~~ $\dim V_{\lambda_i}$ di λ_i è uguale alla molteplicità algebrica m_i di λ_i,

si ha $\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} = n$

Dunque $\dim \left(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \right) = n = \dim V$, da cui segue

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V. \quad \square$$

Ovviamente si ha $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$ se e solo se esiste una base di V che sia composta da autovettori di φ. (È sufficiente prendere l'unione di una base di V_{λ_1} con una base di V_{λ_2} e così via fino a V_{λ_k})

Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V composta da autovettori di φ, allora la matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi}$ associata a φ rispetto alla base $\mathcal{V}$ sarà diagonale e gli elementi sulla diagonale principale di $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi}$ saranno gli autovalori di φ.

Viceversa, se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V per la quale la matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi}$ è diagonale, allora $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori di φ e gli elementi sulla diagonale principale di $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi}$ sono gli autovalori di φ.

<u>Def</u>: Un endomorfismo $\varphi \in End(V)$ si dice diagonalizzabile se V ammette una base di autovettori di φ.

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$.

Con questa terminologia possiamo riformulare il risultato fondamentale ottenuto.

Teorema: Un endomorfismo $\varphi \in End(V)$ è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti condizioni:

(i) il polinomio caratteristico $P(t)$ di φ ha tutte le radici reali (ossia si fattorizza in $\mathbb{R}[t]$ in un prodotto di polinomi di primo grado)

(ii) la molteplicità geometrica di ogni autovalore λ coincide con la sua molteplicità algebrica.

Equivalentemente si può formulare il teorema in termini matriciali.

Teorema: Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti condizioni:

(i) il polinomio caratteristico $P(t)$ di A ha tutte le radici reali (ossia si fattorizza in fattori di primo grado in $\mathbb{R}[t]$)

(ii) la molteplicità geometrica di ogni autovalore λ coincide con la sua molteplicità algebrica.

Esercizio: Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare se A è diagonalizzabile.

(b) In caso lo sia, determinare una matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ed una matrice invertibile $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tali che si abbia $D = H^{-1} A H$.

Svolgimento:

Polinomio caratteristico: $P(t) = \det \begin{pmatrix} -1-t & -3 & -3 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = -(t+1)(2-t)^2$

autovalori: -1 di molt. alg. 1, 2 di molt. alg. 2

autospazi:

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$\dim V_{-1} = 1 =$ molt. alg. di -1

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0), (1,0,-1) \rangle$$

$\dim V_2 = 2 =$ molt. alg. di 2

Dunque A è diagonalizzabile.

Sia $\mathcal{V} = \{(1,0,0), (1,-1,0), (1,0,-1)\}$ $\mathcal{V}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori per A

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad H = A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ poiché si ha}$$

$A = A\ A\ A$

Esercizio: Siano A e D_a le seguenti matrici, la seconda dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D_a = \begin{pmatrix} a+3 & 2a+2 & 0 \\ -a-1 & -2a & 0 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) determinare autovalori ed autospazi di A.

b) La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che $D = H^{-1}AH$.

c) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste una matrice invertibile H tale che $D_a = HAH^{-1}$? Esibire una tale H.

Svolgimento:

a) Polinomio caratteristico di A:

$$P(t) = \det(A - tI_3) = \det\begin{pmatrix} -1-t & 3 & 0 \\ -2 & 4-t & 0 \\ -1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$= (2-t)\Big((t+1)(t-4)+6\Big) = (2-t)(t^2-3t+2) = -(t-1)(t-2)^2$$

Gli autovalori di A sono: 1 con molteplicità algebrica 1 e 2 con molteplicità algebrica 2.

Calcolo degli autospazi:

$$V_1 = \ker(A - I_3) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dunque}$$

$$V_1 : \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad V_1 = \langle (3,2,1) \rangle$$

$\dim V_1 = 1$; la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è uguale alla sua molteplicità geometrica.

$$V_2 = \ker\left(A - 2I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ dunque

[redacted] $V_2 : \begin{cases} -x+y = 0 \\ -2x+2y = 0 \\ -3x+3y = 0 \end{cases}$ da cui $V_2 = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

$\dim V_2 = 2$, quindi la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 è uguale alla sua molteplicità geometrica.

b)

Conclusione: Poiché $P(t)$ ha tutte le radici reali e la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla molteplicità geometrica di tale autovalore, la matrice A è diagonalizzabile.

$\mathcal{V} = \{(3,2,1), (1,1,0), (0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\varphi} = A \quad \left(\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \right)$.

Allora si ha $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

e $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi} = A_{\mathcal{E},\mathcal{V},id_{\mathbb{R}^3}} \, A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\varphi} \, A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$

cioè definendo $H = A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ $\left(\text{ossia } H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

si ha $D = H^{-1} A H$.

c) Valgono le seguenti proposizioni

<u>Prop:</u> Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono simili e una delle due è diagonalizzabile, anche l'altra lo è.

<u>Prop:</u> Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono simili esse hanno gli stessi autovalori, con stessa molteplicità algebrica e con stessa molteplicità geometrica (e stesso polinomio caratteristico)

<u>Prop:</u> Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono diagonalizzabili, allora sono simili se e solo se hanno stesso polinomio caratteristico.

<u>Oss:</u> La prima e la terza sono conseguenze della seconda.

<u>Oss:</u> Esistono matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con stesso polinomio caratteristico, dunque stessi autovalori, stessa molteplicità algebrica per ogni autovalore e stessa molteplicità geometrica per ogni autovalore, che non sono simili.

Un esempio è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimostrazione di questa osservazione prelude alla teoria di Jordan:

se A e B sono simili, anche A^2 e B^2 lo sono, quindi si deve avere $\dim(\ker(A^2)) = \dim(\ker(B^2))$

ma in questo esempio l'uguaglianza non vale.

Dopo questa discussione generale, applichiamo questi risultati al punto c) dell'esercizio.

Da quanto visto la matrice D_a sarà simile alla matrice A se e solo se D_a ha autovalori 1 con molt. alg. 1 e 2 con molt. alg. 2 uguale alla sua molt. geom.

Calcoliamo dunque il polinomio caratteristico di D_a.

$$P(t) = \det(D_a - tI_3) = \det\begin{pmatrix} a+3-t & 2a+2 & 0 \\ -a-1 & -2a-t & 0 \\ a & a & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (1-t)\left((a+3-t)(-2a-t) + 2(a+1)^2\right) =$$

$$= (1-t)\left(t^2 + (a-3)t - 2(a-1)\right) = (1-t)(t-2)(t+(a-1))$$

Il polinomio caratteristico di D_a è uguale al polinomio caratteristico di A se e solo se $a=-1$.

Vediamo se D_{-1} è diagonalizzabile.

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \ker(D_{-1} - I_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$V_2 = \ker(D_{-1} - 2I_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0), (1,0,-1) \rangle$$

La molt. alg. è uguale alla molt. geom. sia per l'autovalore 1 che per l'autovalore 2, dunque D_{-1} è diagonalizzabile ed è quindi simile ad A. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} D_{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

La matrice H cercata è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

cioè $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.