<u>Esercizio</u>: Al variare di $a \in \mathbb{R}$ siano dati gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$,

$$f_a(x,y,z) = (ax,\ x+y+az,\ z).$$

a) Dare la matrice di f_a rispetto alla base canonica.

b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ f_a non è iniettivo? Per tali valori determinare il nucleo di f_a. Vi sono altri valori di a dove f_a ammette nucleo non nullo?

c) Al variare di a dire se f_a è diagonalizzabile e trovare una base che diagonalizzi.

d) Nel caso $a=0$ determinare la matrice associata a f_a rispetto alla base $\{(1,1,0),(-2,-1,0),(1,0,-1)\}$. Tale matrice è diagonalizzabile?

<u>Svolgimento</u>:

a) $f_a(1,0,0) = (a,1,0)$, $f_a(0,1,0) = (0,1,0)$, $f_a(0,0,1) = (0,a,1)$

dunque $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f_a} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) f_a non è iniettivo $\Longleftrightarrow$ $\det\left(A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f_a}\right) = 0$

Calcoliamo tale determinante.

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a$$

Dunque f_a non è iniettivo per $a=0$

$\ker f_a = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0) \rangle$. Per $a \neq 0$, $\ker f_a = \{(0,0,0)\}$.

c) Polinomio caratteristico:

$$P(t) = \det\begin{pmatrix} a-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & a \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (a-t)(1-t)^2$$

Gli autovalori di f_a sono: $1, a$

caso $a \neq 1, 0$

molt. alg. dell'autovalore $1 = \mathbf{2}$

autospazio V_1

$$V_1 = \ker\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0) \rangle \qquad \dim V_1 = 1$$

Dunque f_a non è diagonalizzabile se $a \neq 1, 0$.

caso $a = 1$

un solo autovalore

1 di molt. alg. 3

autospazio V_1:

$$V_1 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle \quad \dim V_1 = 2$$

dunque f_1 non è diagonalizzabile.

caso $a = 0$

autovalori: 0 di molt. alg. 1, 1 di molt. alg. 2

autospazi:

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0) \rangle \ ; \ \dim V_0 = 1$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle \ ; \ \dim V_1 = 2$$

Il polinomio caratteristico ha tutte le radici reali, inoltre per ogni autovalore la molt. geom. coincide con la molt. alg., dunque g_0 è diagonalizzabile.

Conclusione: g_a è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$

una base che diagonalizza g_0 è $\{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

rispetto a tale base g_0 ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Sia $\mathcal{V} = \{(1,1,0), (-2,-1,0), (1,0,-1)\}$, allora

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V},g_0} = A_{\mathcal{E},\mathcal{V},id_{\mathbb{R}^3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$$

cioè

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V},g_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando l'inversa si ha $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

dunque

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V},g_0} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tale matrice è diagonalizzabile poiché simile ad una matrice diagonalizzabile.

/

Per molte applicazioni dell'algebra lineare la nozione di spazio vettoriale non è sufficiente. È necessario introdurre

- una nozione di grandezza di un vettore
- una nozione di angolo tra due vettori

Queste nozioni possono essere definite a partire dal concetto di prodotto scalare che ora andiamo a definire e studiare.

<u>Def</u>: Sia $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Si definisce il prodotto scalare usuale o euclideo tra v e w come segue

$$v \cdot w = v \, I_n \, w^t = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

<u>Oss</u>: Il prodotto scalare è così chiamato perché il risultato del prodotto scalare di due vettori è un numero reale.

Proprietà del prodotto scalare

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot y = y \cdot x$

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$

4. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot x \geq 0 \quad$ e $\quad x \cdot x = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$

Esempio: $(2,0,-1)\cdot(1,4,3) = 2\cdot 1 + 0\cdot 4 + (-1)3 = -1$

Grazie alla proprietà 4 possiamo dare la seguente definizione.

Def: Consideriamo $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale.

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo $\|x\| = \sqrt{x\cdot x}$. Il numero reale positivo $\|x\|$ si dice norma di x.

Vettori di norma 1 si dicono versori.

Esempi: (i) $(0,0,0)$ ha norma 0

(ii) $\|(1,0,0)\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$; $(1,0,0)$ è un versore

(iii) $\|(2,-1,3)\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$.

Proprietà della norma. (La verificazione è facile dalla definizione).

a) $\|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

b) se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

Ulteriori proprietà (La verificazione richiede una dimostrazione non banale)

c) disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x\cdot y| \leq \|x\|\,\|y\|$

d) disuguaglianza triangolare

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz permette di definire l'angolo tra due vettori.

Def: Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ non nulli, si definisce il coseno dell'angolo tra v e w come segue

$\cos(\widehat{vw}) =$ [redacted] $\dfrac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}$

Esempio: $v = (1,0)$, $w = (-1,-1)$, allora si ha

$\cos(\widehat{vw}) = \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|} = \dfrac{1(-1) + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2+0^2}}$ [redacted] $\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}$

ossia

$$\cos(\widehat{vw}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

dunque $\widehat{vw} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$

Abbiamo visto quindi che tramite il prodotto scalare è possibile definire una nozione di lunghezza di un vettore, ossia la norma, e una nozione di angolo tra due vettori.

È quindi possibile definire in particolare l'ortogonalità tra vettori.

Def: Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se si ha

$$v \cdot w = 0$$

Esempio: $(1,4,-1,3)$ è ortogonale a $(7,-1,0,-1)$.

Infatti $(1,4,-1,3) \cdot (7,-1,0,-1) = 1 \cdot 7 + 4(-1) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 0$.