

## Foglio di esercizi 10

**Esercizio 1** In  $\mathbb{R}^4$  dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio  $U = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$ .

- (a) Determinare una base ortonormale di  $U$ .
- (b) Determinare una base ortonormale di  $U^\perp$ .
- (c) Determinare la proiezione ortogonale su  $U^\perp$  del vettore  $(4, 1, 2, 1)$ .
- (d) Determinare la proiezione ortogonale su  $U^\perp$  del sottospazio  $\langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$ .

**Esercizio 2** Al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ , si considerino il sottospazio  $U_a = \langle (1, 0, 1), (1+a, -a, a-1) \rangle$  di  $\mathbb{R}^3$  ed il vettore  $v = (2, -1, 3)$ .

- (a) Per  $a = 1$ , calcolare la proiezione ortogonale  $p_{U_1}(v)$  di  $v$  su  $U_1$ .
- (b) Per  $a = 1$ , determinare tutti i vettori di  $\mathbb{R}^3$  che abbiano la stessa proiezione ortogonale di  $v$  su  $U_1$ .
- (c) Determinare i valori di  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la proiezione  $p_{U_a}(v)$  è nulla.
- (d) Determinare i valori di  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la norma della proiezione ortogonale  $p_{U_a}(v)$  sia uguale a  $\sqrt{13}$ .

**Esercizio 3** In  $\mathbb{R}^4$  dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio  $U = \langle (2, 0, 1, -1), (1, 0, 1, 0), (1, -1, -1, 0) \rangle$ .

- (a) Determinare una base ortonormale di  $U^\perp$ .
- (b) Determinare una base ortonormale di  $U$ .
- (c) L'unione di queste due basi è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^4$ ?
- (d) Determinare la proiezione ortogonale di  $(1, 0, 0, 0)$  su  $U$ .
- (e) Determinare tutti i vettori del sottospazio  $W = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$  la cui proiezione ortogonale su  $U$  appartiene al sottospazio  $\langle (1, 0, 1, 0) \rangle$ .

**Esercizio 4** Si consideri  $\mathbb{R}^4$  dotato del prodotto scalare usuale.

- (a) Determinare la proiezione ortogonale del vettore  $(1, 4, -3, -2)$  su  $V$ , dove  $V^\perp = \langle (1, 1, 0, 1), (0, 3, -4, 1) \rangle$ .
- (b) Determinare un sistema lineare che abbia come soluzione  $V$ .
- (c) Determinare la proiezione ortogonale di  $(1, 4, -3, -2)$  su  $W$ , dove  $W^\perp = \langle (2, 0, 1, 1) \rangle$ .