<u>Def</u>: $T \subset \mathbb{R}^n$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Si dice ortogonale di T e si indica $T^\perp$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dai vettori ortogonali ad ogni vettore di T:

$$T^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \forall t \in T,\ v \cdot t = 0 \}$$

<u>Prop</u>: $T^\perp$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

<u>dim</u>. Se $v_1, v_2 \in T^\perp$, allora si ha $v_1 \cdot t = 0$ e $v_2 \cdot t = 0$, $\forall t \in T$. Ma quindi $(v_1 + v_2) \cdot t = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 0 + 0 = 0$, $\forall t \in T$; cioè $v_1 + v_2 \in T^\perp$. Allo stesso modo si ha $(\lambda v_1) \cdot t = \lambda (v_1 \cdot t) = 0$, $\forall t \in T$. Dunque $\lambda v_1 \in T^\perp$, e quindi $T^\perp$ è un sottospazio. $\square$

<u>Prop</u>: Se $T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$, allora si ha

$$T^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot t_1 = 0, \dots, v \cdot t_m = 0 \}.$$

<u>dim</u>.

Facciamo vedere che se $v \in \mathbb{R}^n$ è tale che $v \cdot t_1 = \dots = v \cdot t_m = 0$, allora $v \cdot t = 0$, $\forall t \in T$.

Sia $t \in T$, allora $t = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_m t_m$ per una certa scelta di $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Dunque $v \cdot t = v \cdot (\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_m t_m) = \alpha_1 (v \cdot t_1) + \dots + \alpha_m (v \cdot t_m)$, segue che $v \cdot t = \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_m \cdot 0 = 0$, cioè si ha $v \in T^\perp$. $\square$

Esercizio: In $\mathbb{R}^4$, sia $U = \langle (1,1,-1,-1), (1,2,0,0) \rangle$.

Determinare una base di $U^\perp$.

Svolgimento:

Si ha $U^\perp = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,w) \cdot (1,1,-1,-1) = 0$ e

$(x,y,z,w) \cdot (1,2,0,0) = 0 \}$. Dunque

$$U^\perp : \begin{cases} x+y-z-w = 0 \\ x+2y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$U^\perp = \langle (2,-1,1,0), (2,-1,0,1) \rangle$; $\dim U^\perp = 2$

$\{ (2,-1,1,0), (2,-1,0,1) \}$ è una base di $U^\perp$.

Oss: Vediamo che $\dim U + \dim U^\perp = 2+2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$; questo è un fatto generale: per qualsiasi $T \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio si ha $T \oplus T^\perp = \mathbb{R}^n$. Dimostriamolo.

Prop: Sia $T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di dimensione m di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim T^\perp = n-m$ e $T \cap T^\perp = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \}$; ossia si ha

$T \oplus T^\perp = \mathbb{R}^n$.

dim. Se $t \in T \cap T^\perp$, si ha $t \cdot t = 0$, dunque $t = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ossia si ha $T \cap T^\perp = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \}$. Inoltre se $\{ t_1, \dots, t_m \}$ è una base di T, si ha che $T^\perp$ è definito dal sistema di m equazioni $w \cdot t_1 = 0, \dots, w \cdot t_m = 0$. Queste equazioni sono lin. ind.

dunque si ha $\dim T^{\perp} = n - m$. $\square$

Proiezioni ortogonali.

Da quanto discusso sopra si ha che per qualsiasi sottospazio T

di $\mathbb{R}^n$ è possibile definire la proiezione $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

su T lungo $T^{\perp}$.

Tale proiezione viene detta <u>proiezione ortogonale su T</u>.

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^4$, sia $V = \langle (1,1,-1,-1), (1,2,0,0) \rangle$.

Calcolare la proiezione ortogonale [redacted] su V di $(4,1,-1,0)$.

<u>Svolgimento</u>:

Poiché $\mathbb{R}^4 = V \oplus V^{\perp}$, si ha $(4,1,-1,0) = v_{\parallel} + v_{\perp}$, con

$v_{\parallel} \in V$ e $v_{\perp} \in V^{\perp}$ e tale decomposizione è unica.

La proiezione ortogonale di $(4,1,-1,0)$ su V è il vettore $v_{\parallel}$.

Calcoliamo $v_{\parallel}$.

Il vettore $v_{\parallel}$ sarà della forma $\alpha(1,1,-1,-1) + \beta(1,2,0,0)$,

dunque $v_{\perp} = (4,1,-1,0) - \alpha(1,1,-1,-1) - \beta(1,2,0,0)$.

Richiediamo che $v_{\perp} \in V^{\perp}$, cioè $v_{\perp} \cdot (1,1,-1,-1) = 0$ e

$v_{\perp} \cdot (1,2,0,0) = 0$.

Si ottiene il seguente sistema per α, β:

$$\begin{cases} v_\perp \cdot (1,1,-1,-1) = 0 \\ v_\perp \cdot (1,2,0,0) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 6 - 4\alpha - 3\beta = 0 \\ 6 - 3\alpha - 5\beta = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 6 \\ 3\alpha + 5\beta = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + 5\beta = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta = \frac{6}{11} \end{cases}$$

Dunque

$$v_\perp = \frac{12}{11}(1,1,-1,-1) + \frac{6}{11}(1,2,0,0) = \frac{6}{11}(3,4,-2,-2).$$

Un'altra maniera di risolvere l'esercizio passa attraverso il calcolo di una base ortonormale di V. Infatti per una base ortonormale il sistema diventa molto più semplice.

Sia $\{u_1, u_2\}$ una base ortonormale di V.

Allora $v_\parallel = \alpha u_1 + \beta u_2$ e $v_\perp = (4,1,-1,0) - \alpha u_1 - \beta u_2$.

Imponendo $v_\perp \in V^\perp$ si ha

$$\begin{cases} v_\perp \cdot u_1 = 0 \\ v_\perp \cdot u_2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} (4,1,-1,0) \cdot u_1 - \alpha\, u_1 \cdot u_1 - \beta\, u_2 \cdot u_1 = 0 \\ (4,1,-1,0) \cdot u_2 - \alpha\, u_1 \cdot u_2 - \beta\, u_2 \cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

e poiché $u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = 1$ e $u_1 \cdot u_2 = 0$, si ha

$$\begin{cases} \alpha = (4,1,-1,0) \cdot u_1 \\ \beta = (4,1,-1,0) \cdot u_2 \end{cases}.$$

Calcoliamo dunque una base ortonormale $\{u_1, u_2\}$ di V.

Applichiamo Gram-Schmidt alla base $\{(1,1,-1,-1),(1,2,0,0)\}$.

$$u_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$$

$$u_2' = (1,2,0,0) - \big((1,2,0,0)\cdot u_1\big)u_1 = (1,2,0,0) - \frac{3}{4}(1,1,-1,-1)$$

$$= \frac{1}{4}(1,5,3,3)$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{2\sqrt{11}}(1,5,3,3)$$

Dunque $\alpha = (4,1,-1,0)\cdot\frac{1}{2}(1,1,-1,-1) = 3$ e

$$\beta = (4,1,-1,0)\cdot\frac{1}{2\sqrt{11}}(1,5,3,3) = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

Quindi la proiezione ortogonale di $(4,1,-1,0)$ su V è

$$v_{\parallel} = \frac{3}{2}(1,1,-1,-1) + \frac{3}{\sqrt{11}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{11}}(1,5,3,3) =$$

$$= \frac{3}{2}(1,1,-1,-1) + \frac{3}{2\cdot 11}(1,5,3,3) =$$

$$= \frac{3}{11}(6,8,-4,-4) = \frac{6}{11}(3,4,-2,-2).$$

<u>Oss</u>: Se $T \subset \mathbb{R}^n$, $\{t_1,\dots,t_m\}$ è una base ortonormale di T, e $v \in \mathbb{R}^n$. Lo stesso ragionamento fatto sopra dimostra che la proiezione ortogonale $v_{\parallel}$ di v su T è

$$v_{\perp} = (v\cdot t_1)t_1 + \dots + (v\cdot t_m)t_m.$$

<u>Esercizio</u>: Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i due sottospazi vettoriali

$$T = \langle (1,0,1), (3,-1,0) \rangle \quad e \quad U = \langle (2,-1,0), (2,-1,-1) \rangle .$$

(a) Determinare una base ortonormale di $S = U \cap T$.

(b) Determinare una base ortonormale di $S^\perp$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $(3,-3,-3)$ su $S^\perp$.

(d) Determinare un vettore di T la cui proiezione ortogonale su U sia $(4,-2,5)$.

<u>Svolgimento</u>:

(a) Determiniamo $S = T \cap U$.

$U: \; x + 2y = 0$

Sia $\alpha(1,0,1) + \beta(3,-1,0)$ il generico vettore di T, imponiamo che appartenga a U; si ottiene l'equazione

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{cioè} \quad \alpha = -\beta .$$

Dunque $S = \langle (2,-1,-1) \rangle$, $\dim S = 1$.

Ortonormalizziamo la base $\{(2,-1,-1)\}$ di S.

Si ottiene, normalizzando $(2,-1,-1)$, la base ortonormale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (2,-1,-1) \right\} .$$

(b) Determiniamo $S^\perp$.

$S^\perp$: $2x-y-z=0$, dunque $S^\perp = \langle (1,2,0),(1,0,2) \rangle$

$\dim S^\perp = 2$. Ortonormalizziamo tramite il procedimento di Gram-Schmidt la base $\{(1,2,0),(1,0,2)\}$.

$$u_1 = \frac{(1,2,0)}{\|(1,2,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

$$u_2' = (1,0,2) - ((1,0,2)\cdot u_1)\,u_1 =$$

$$= (1,0,2) - \frac{1}{5}(1,2,0) = \frac{1}{5}(4,-2,10) = \frac{2}{5}(2,-1,5)$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)$$

Otteniamo la base ortonormale $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)\right\}$ di $S^\perp$.

(c) $v = (3,-3,-3)$, allora $v = v_{/\!/} + v_\perp$ con $v_{/\!/} \in S^\perp$ e $v_\perp \in S$.

(si ha $(S^\perp)^\perp = S$.)

La proiezione ortogonale su $S^\perp$ di v è $v_{/\!/}$. Per calcolare $v_{/\!/}$ possiamo usare la ricetta descritta nell'esercizio precedente in termini di una base ortonormale di $S^\perp$, oppure possiamo calcolare $v_\perp$ tramite la stessa ricetta in termini di una base ortonormale di S.

Poiché $\dim S = 1$ optiamo per questa seconda via.

$$v_{\perp} = \left(v \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1) = \frac{1}{6}\Big((3,-3,-3)\cdot(2,-1,-1)\Big)(2,-1,-1)$$

$$= (4,-2,-2)$$

Dunque la proiezione ortogonale di $(3,-3,-3)$ su $S^{\perp}$ è

$$v_{/\!/} = (3,-3,-3) - (4,-2,-2) = (-1,-1,-1)$$

(d)

Il vettore generico di T è

$\alpha(1,0,1) + \beta(3,-1,0)$. Calcoliamo la sua proiezione ortogonale su U ed imponiamo che sia $(4,-2,5)$.

Poiché $U^{\perp} = \langle (1,2,0) \rangle$ ed una base ortonormale di $U^{\perp}$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \right\}$, si ha che se $v = \alpha(1,0,1) + \beta(3,-1,0)$,

$v = v_{/\!/} + v_{\perp}$ con $v_{/\!/} \in U$ e $v_{\perp} \in U^{\perp}$

e $v_{\perp} = \left(v \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) = \dfrac{v \cdot (1,2,0)}{5}(1,2,0)$

dunque $v_{\perp} = \dfrac{\alpha+\beta}{5}(1,2,0)$

segue che

$$(4,-2,5) = v_{/\!/} = (\alpha + 3\beta, -\beta, \alpha) - \frac{\alpha+\beta}{5}(1,2,0)$$

Ossia

$$(4,-2,5) = \frac{1}{5}\left(4\alpha+14\beta, -2\alpha-7\beta, 5\alpha\right)$$

Risolvendo il sistema che si ottiene si trova $\alpha=5, \beta=0$.

Dunque il vettore $(5,0,5)$ ha come proiezione ortogonale su V il vettore $(4,-2,5)$.