<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i sottospazi $U = \langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle$ e $V = \langle (2,1,1), (0,1,1) \rangle$.

(a) Calcolare la proiezione ortogonale $p_V(1,0,1)$ di $(1,0,1)$ su V.

(b) Determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non appartenente ad U tale che la sua proiezione ortogonale su U, $p_U(v)$, sia esattamente $(1,0,1)$.

(c) Determinare i vettori di V la cui proiezione ortogonale su U appartiene al sottospazio $\langle (1,0,1) \rangle$.

(d) Determinare tutti i vettori $u \in U$ e $v \in V$ tali che $p_U(v) = u$ e $p_V(u) = v$.

<u>Svolgimento</u>:

(a) Si ha $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$, determiniamo $V^\perp$ (ciò equivale a determinare un'equazione di V)

$(x,y,z) \in V^\perp$ se e solo se

– $(x,y,z) \cdot (2,1,1) = 0$

– $(x,y,z) \cdot (0,1,1) = 0$

Bisogna quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $V^\perp = \langle (0,1,-1) \rangle$

(infatti V è definito dall'equazione $y - z = 0$)

Determiniamo $p_V(1,0,1)$.

Si ha $(1,0,1) = p_V(1,0,1) + p_{V^\perp}(1,0,1)$

dove $p_{V^\perp}(1,0,1)$ è la proiezione ortogonale di $(1,0,1)$ su $V^\perp$

($p_V(1,0,1)$ e $p_{V^\perp}(1,0,1)$ li abbiamo a volte anche

indicati con $v_{\parallel}$ e $v_{\perp}$ rispettivamente)

Poiché $V^\perp = \langle (0,1,-1) \rangle$, dalla formula generale per calcolare la proiezione ortogonale su un sottospazio, conoscendo una base ortonormale del sottospazio, deriva

$$p_{V^\perp}(1,0,1) = \left((1,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

cioè

$$p_{V^\perp}(1,0,1) = \frac{-1}{2}(0,1,-1)$$

Dunque $p_V(1,0,1) = (1,0,1) - p_{V^\perp}(1,0,1) = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$

[Fare la verifica che $(1,0,1) = p_V(1,0,1) + p_{V^\perp}(1,0,1)$ e

che $p_V(1,0,1) \in V$ e $p_{V^\perp}(1,0,1) \in V^\perp$.]

(b) Si ha $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$.

Determiniamo $U^\perp$: $(x,y,z) \in U^\perp \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x \quad +z=0 \end{cases}$

Risolvendo si ottiene $U^\perp = \langle (1,0,-1) \rangle$.

Sappiamo che $p_U^{-1}(1,0,1) = (1,0,1) + \ker(p_U)$

Ma si ha $\ker(p_U) = U^\perp$, dunque

$p_U^{-1}(1,0,1) = (1,0,1) + \langle (1,0,-1) \rangle$

Poiché U e $U^\perp$ sono in somma diretta, l'unico vettore di $p_U^{-1}(1,0,1)$ contenuto in U è $(1,0,1)$; dunque, ad esempio, $(2,0,0) = (1,0,1) + (1,0,-1)$ non è contenuto in U ed ha come proiezione ortogonale su U il vettore $(1,0,1)$.

(c) Determiniamo $p_U^{-1}(\langle (1,0,1) \rangle)$.

Si ha $p_U^{-1}(\alpha(1,0,1)) = \alpha(1,0,1) + \langle (1,0,-1) \rangle$ usando lo stesso ragionamento del punto (b).

Ma quindi, poiché $v \in p_U^{-1}(\langle (1,0,1) \rangle)$ se e solo se per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, $p_U(v) = \alpha(1,0,1)$ (cioè $v \in p_U^{-1}(\alpha,0,\alpha)$), si ha $v \in (\alpha,0,\alpha) + \langle (1,0,-1) \rangle$, cioè

$v = \alpha(1,0,1) + \beta(1,0,-1)$. Si deduce che

$p_U^{-1}(\langle 1,0,1 \rangle) = \langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle$

Intersechiamo ora $\langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle$ con V.

Si ha che il sottospazio $\langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle$ è definito dall'equazione $y = 0$.

Cerchiamo i vettori del tipo $\alpha(2,1,1) + \beta(0,1,1)$ per i quali si abbia $y = 0$.

Questi sono tutti i vettori del sottospazio $\langle (2,1,1) - (0,1,1) \rangle$,

cioè $\langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle \cap V = \langle (2,0,0) \rangle = \langle (1,0,0) \rangle$.

Si conclude che i vettori v di V la cui proiezione ortogonale $p_U(v)$ su U sia $(1,0,1)$ sono della forma $(\alpha, 0, 0)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Si ha $v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$, con $p_U(v) \in U$ e $p_{U^\perp}(v) \in U^\perp$.

Poiché $p_U(v) = u$, segue che $v = u + p_{U^\perp}(v)$

Chiamando, per concisione, z il vettore $p_{U^\perp}(v)$, si ha $v = u + z$, con $z \in U^\perp$.

Applicando ora p_V alla riscritta equazione, si ha

$$p_V(v) = p_V(u) + p_V(z).$$

Ma $p_V(v) = v$ e $p_V(u) = v$, dunque segue che $p_V(z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

cioè $z \in V^\perp$. Ma quindi $z \in U^\perp \cap V^\perp = \langle (1,0,-1) \rangle \cap \langle (0,1,-1) \rangle$

Poiché $\langle (1,0,-1) \rangle \cap \langle (0,1,-1) \rangle = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$ segue che $z = (0,0,0)$ e quindi $v = u$.

Si conclude che i vettori $u \in U$, $v \in V$ tali che $p_U(v) = u$ e $p_V(u) = v$, sono del tipo $u = v \in U \cap V = \langle (1,1,1) \rangle$.

<u>Esercizio</u>: Si consideri la seguente matrice, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A_k = \begin{pmatrix} k+2 & k+1 & 0 \\ -k-1 & 2 & k+1 \\ 3k+3 & k+1 & -2k-1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(1,0,1)$ è autovettore di A_k.

(b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice è diagonalizzabile ed ha un autovalore doppio, determinare una matrice H tale che $H^{-1} A_k H$ sia diagonale.

<u>Svolgimento</u>:

(a) $(1,0,1)$ è autovettore di A_k se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$A_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $A_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed imponiamo che sia della forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

$$A_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 & k+1 & 0 \\ -k-1 & 2 & k+1 \\ 3k+3 & k+1 & -2k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix} = (k+2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $(1,0,1)$ è autovettore di A_k per qualsiasi k.
L'autovalore è $k+2$.

(b) Determiniamo il polinomio caratteristico di A_k.

$$P(t) = \det(A_k - tI_3) = \det\begin{pmatrix} k+2-t & k+1 & 0 \\ -k-1 & 2-t & k+1 \\ 3k+3 & k+1 & -2k-1-t \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante secondo ad esempio la prima riga ed effettuando ordinatamente tutti i calcoli elementari insiti in tale sviluppo si ottiene

$$P(t) = -\big(t-(k+2)\big)\big(t+(2k+1)\big)(t-2)$$

Le radici di $P(t)$ sono $2,\ k+2,\ -2k-1$

Ci sono vari casi da distinguere per quanto riguarda le molteplicità algebriche degli autovalori.

- caso $k+2=2$, cioè $k=0$

Gli autovalori di A_0 sono : -1 con molt. alg. 1
2 con molt. alg. 2

- caso $-2k-1=2$, cioè $k=-\frac{3}{2}$

Gli autovalori di $A_{-3/2}$ sono : $\frac{1}{2}$ con molt. alg. 1
2 con molt. alg. 2

- caso $k+2 = -2k-1$, cioè $k=-1$

Gli autovalori di A_{-1} sono: 1 con molt. alg. 2

2 con molt. alg. 1

- $k \neq 0, -3/2, -1$

Gli autovalori di A_k sono: 2 con molt. alg. 1

$k+2$ con molt. alg. 1

$-2k-1$ con molt. alg. 1

Per $k \neq -3/2, -1, 0$ la matrice A_k è diagonalizzabile poiché il polinomio caratteristico ha tutte radici reali di molteplicità 1.

Studiamo ora la diagonalizzabilità di A_k nei tre casi rimanenti.

- $k = -3/2$

$$A_{-3/2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la molt. geom. dell'autovalore 2.

$$V_2 = \ker\left(A_{-3/2} - 2I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$V_2 = \langle (1,-3,1) \rangle$, $\dim V_2 = 1 < 2$, dunque $A_{-3/2}$ non è diagonalizzabile.

• $k = -1$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A_{-1} è diagonale dunque diagonalizzabile.
(la base canonica è una base di autovettori)

• $k = 0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la molt. geom. dell'autovalore 2

$$V_2 = \ker\left(A_0 - 2I_3\right) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema lineare omogeneo si ottiene

$V_2 = \langle (1,0,1) \rangle$; $\dim V_2 = 1 < 2$, dunque A_0 non è diagonalizzabile.

(c) L'unico $k \in \mathbb{R}$ tale che A_k sia diagonalizzabile ed abbia un autovalore doppio è $k = -1$.

[redacted]

Poiché A_{-1} è una matrice diagonale, si può scegliere $H = I_3$.

Abbiamo visto due classi importanti di endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale:

(i) le isometrie

(ii) le proiezioni ortogonali

Queste ultime sono casi particolari di una classe più ampia di endomorfismi, gli endomorfismi simmetrici, che ora andiamo a definire e studiare.

<u>Def</u>: Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale. L'endomorfismo ϕ si dice simmetrico se

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(v) \cdot w = v \cdot \phi(w).$$

<u>Def</u>: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matrice A si dice simmetrica se si ha

$$A^t = A \quad .$$

<u>Esempio</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$ è una matrice simmetrica.

Vediamo ora il legame tra endomorfismi simmetrici e matrici simmetriche.

<u>Prop</u>: Sia $\phi \in \mathcal{E}nd(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Allora ϕ è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale se e solo se la matrice $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

<u>dim</u>.

Sia $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

La matrice $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ è simmetrica se e solo se $\forall i,j$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Se $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, etc. sono i vettori della base canonica si ha $a_{ij} = e_i \cdot \phi(e_j)$.

Dunque se ϕ è un endomorfismo simmetrico si ha

$$a_{ij} = e_i \cdot \phi(e_j) = \phi(e_i) \cdot e_j = e_j \cdot \phi(e_i) = a_{ji} ;$$

quindi $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ è una matrice simmetrica.

Viceversa, se $a_{ij} = a_{ji}$ si ha $e_i \cdot \phi(e_j) = \phi(e_i) \cdot e_j$.

Per la linearità di ϕ e la bilinearità del prodotto scalare questo implica che $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot \phi(w) = \phi(v) \cdot w$. $\square$

<u>Oss</u>: Se $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$, $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n)$, allora si ha $v \cdot \phi(w) = (x_1 \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.