Il teorema fondamentale sugli endomorfismi simmetrici è il seguente.

<u>Teorema</u>: (teorema spettrale) Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$. Allora si ha che ϕ è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale se e solo se ammette una base ortonormale di autovettori.

L'equivalente matriciale di questo teorema è il seguente.

<u>Teorema</u>: (teorema spettrale) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A è simmetrica se e solo se è ortogonalmente diagonalizzabile, ossia se e solo se esistono una matrice ortogonale H ed una matrice diagonale D tali che $D = H^{-1}AH = H^tAH$.

<u>Oss</u>: Se A è ortogonalmente diagonalizzabile è facile vedere che A è una matrice simmetrica. Infatti,

$$D = H^{-1}AH \implies A = HDH^{-1} = HDH^t, \text{ ma allora}$$

$$A^t = (HDH^t)^t = (H^t)^t D^t H^t = HDH^t = A,$$

cioè A è simmetrica.

Il fatto che una matrice simmetrica sia ortogonalmente diagonalizzabile è più profondo e lo vedremo solo nei casi $n=2$ e $n=3$.

caso $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A - tI_2) = t^2 - (a+c)t + (ac-b^2).$$

Le radici di questo polinomio sono

$$\lambda_1 = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \quad e$$

$$\lambda_2 = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

λ_1 e λ_2 sono reali poiché $(a-c)^2+4b^2 \geq 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 \iff a=c$ e $b=0$

ossia $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Questa matrice è diagonale quindi ortogonalmente diagonalizzabile.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ la matrice A è diagonalizzabile poiché la molt. alg. di ciascun autovalore è 1.

Sia v_1 un autovettore di A di autovalore λ_1 e tale che $\|v_1\| = 1$.

Sia v_2 un autovettore di A di autovalore λ_2 e tale che $\|v_2\| = 1$.

Si ha che v_1 e v_2 sono ortogonali, infatti se ϕ è l'endomorfismo simmetrico di matrice A si ha

$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = \phi(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot \phi(v_2) = \lambda_2 v_1 \cdot v_2$$

Poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ segue che $v_1 \cdot v_2 = 0$, dunque $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

caso $n=3$

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ è simmetrica, sia $\phi \in \mathcal{E}nd(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo simmetrico rappresentato da A.

Il polinomio caratteristico di A ha grado 3, dunque ha una radice reale α. Sia v_1 un versore che sia autovettore di ϕ (o di A) di autovalore α.

Completiamo v_1 ad una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Si ha, se $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\phi} = \left(A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}\right)^{-1} A_{\mathcal{E},\mathcal{E},id} \, A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$$

Poiché $\mathcal{E}$ e $\mathcal{V}$ sono basi ortonormali si ha che $H = A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ è una matrice ortogonale. Ponendo $B = A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\phi}$ e $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ si ha $B = H^t A H$. Poiché A è simmetrica e H ortogonale si ha $B^t = B$, cioè B è simmetrica.

Inoltre $\phi(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot \phi(v_2)$, dunque $v_1 \cdot \phi(v_2) = 0$; ed analogamente $v_1 \cdot \phi(v_3) = 0$.

Segue che B è della forma

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è ortogonalmente diagonalizzabile per quanto visto nel caso $n=2$, dunque anche A lo è.

Esercizio: Siano A e B_k le matrici seguenti, la seconda dipendente dal parametro k

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ k^2 & -2k & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autovettori di A. La matrice A è diagonalizzabile?

(b) Determinare, se esiste, una base ortonormale di autovettori di A. Scrivere quindi una matrice K ortogonale tale che $K^t A K = D$ con D diagonale.

(c) Determinare tutti i valori $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(1,1,1)$ è autovettore di B_k. Per quale autovalore?

(d) Per i valori di k trovati in (c), la matrice B_k è diagonalizzabile?

(e) Tra i valori di k trovati al punto (c), ce n'è qualcuno per cui B_k sia simile ad A? In caso affermativo, determinare una matrice H tale che $H^{-1} A H = B_k$. È possibile trovare una tale matrice H che sia anche ortogonale?

Svolgimento:

(a) La matrice A è simmetrica dunque è diagonalizzabile.

Polinomio caratteristico di A:

$$P(t) = \det(A - tI_3) = \det\begin{pmatrix} 6-t & 1 & 0 \\ 1 & 6-t & 0 \\ 0 & 0 & 7-t \end{pmatrix} = (t-5)(t-7)^2$$

autovalore 5 di molt. alg. 1

$$V_5 = \ker(A - 5I_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

autovalore 7 di molt. alg. 2

$$V_7 = \ker(A - 7I_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

(b)

Una base ortonormale di V_5 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\}$

Una base ortonormale di V_7 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}$

Una base ortonormale di autovettori si ottiene unendo queste due basi: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}$.

Ponendo $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha che K è ortogonale e

$$K^t A K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B_k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -4 & -4\\ 4 & 5 & -2\\ k^2 & -2k & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\k^2-2k-1\end{pmatrix}$$

Dunque $(1,1,1)$ è autovettore di B_k se e solo se

$k^2-2k-1=7$ ossia $k^2-2k-8=0$

Cioè $k=4$ e $k=-2$, l'autovalore è 7.

(d) $k=4$

$$B_4=\begin{pmatrix}15 & -4 & -4\\ 4 & 5 & -2\\ 16 & -8 & -1\end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico:

$$P(t)=\det(B_4-tI_3)=\det\begin{pmatrix}15-t & -4 & -4\\ 4 & 5-t & -2\\ 16 & -8 & -1-t\end{pmatrix}=-(t-7)^2(t-5)$$

autospazi:

$$V_5=\ker(B_4-5I_3)=\ker\begin{pmatrix}10 & -4 & -4\\ 4 & 0 & 2\\ 16 & -8 & -6\end{pmatrix}=\langle(2,1,4)\rangle$$

$$V_7=\ker(B_4-7I_3)=\ker\begin{pmatrix}8 & -4 & -4\\ 4 & -2 & -2\\ 16 & -8 & -8\end{pmatrix}=\langle(1,2,0),(1,0,2)\rangle$$

B_4 è diagonalizzabile; si ha

$$\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}B_4\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$k = -2$

$$B_{-2} = \begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico:

$$P(t) = \det\left(B_{-2} - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} 15-t & -4 & -4 \\ 4 & 5-t & -2 \\ 4 & 4 & -1-t \end{pmatrix} = -(t-1)(t-7)(t-11)$$

B_{-2} ha tre autovalori distinti dunque è diagonalizzabile.

(e)

B_{-2} non ha stesso polinomio caratteristico di A, dunque non è simile ad A.

B_4 ha stesso polinomio caratteristico di A ed è diagonalizzabile come anche A, dunque A e B_4 sono simili.

Poiché
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt2} & 1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 1/\sqrt2 & 0 \\ -1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} B_4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

segue che
$$B_4 = H^{-1} A H \quad \text{con} \quad H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0 \\ -1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

(calcolare tale matrice)

H non può essere trovata ortogonale poiché B_4 non è simmetrica

Vogliamo ora applicare l'algebra lineare allo studio della geometria. Introduciamo il piano affine e lo spazio affine.

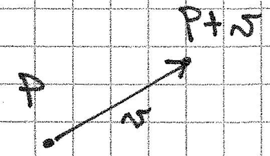
Il piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Il piano affine consiste in un insieme di punti X, identificato con $\mathbb{R}^2$, su cui agisce lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$.

Ossia è data una legge

$$\begin{aligned} X \times V &\longrightarrow X \\ (P, v) &\longmapsto P+v \end{aligned}$$

che ad un punto del piano e ad un vettore associa un punto del piano

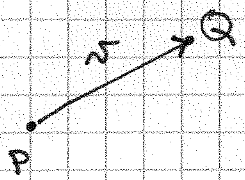


Se $P = (x_1, x_2)$ e $v = (\alpha, \beta)$, allora $P+v = (x_1+\alpha, x_2+\beta)$.

<u>Oss</u>: È importante tenere distinti punti e vettori anche se ambedue sono elementi di $\mathbb{R}^2$. È possibile sommare due vettori e si ottiene un vettore, è possibile sommare un punto ed un vettore e si ottiene un punto, non è possibile sommare due punti.

La legge di somma $X \times V \to X$ tra punti e vettori soddisfa le seguenti condizioni:

(i) preso un punto P e preso un qualsiasi altro punto Q esiste un unico vettore v tale che $Q = P + v$,

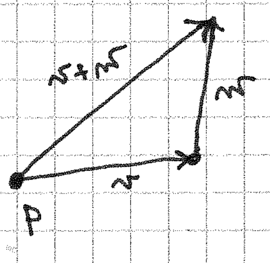


si denoterà $v = Q - P$.

(ii) Se $P + v = P + w$ allora $v = w$.

<u>Oss</u>: La condizione (ii) è una conseguenza della (i).

(iii) $P + (v +_V w) = (P + v) + w$



L'analogo del concetto di sottospazio vettoriale, nel caso del piano o dello spazio affini, è il concetto di sottovarietà lineare (o sottospazio affine).

<u>Def</u>: Una sottovarietà lineare L di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è l'insieme

$$\left\{ P + v \mid v \in \tilde{V} \right\}$$

dove P è un punto fissato di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e $\tilde{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Il sottospazio $\tilde{V}$ si dice giacitura o spazio direttore di L.

Una retta è una sottovarietà lineare di dimensione 1.

<u>Oss</u>: Le sottovarietà lineare sono i traslati dei sottospazi, se si identifica l'insieme dei punti con lo spazio vettoriale.

Esempi di sottovarietà lineari del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

(i) $\dim L = 0$

$L = P$

le sottovarietà lineari di dimensione 0 sono i punti

(ii) $\dim L = 1$

$L = P + \langle v \rangle$ con $v \in \mathbb{R}^2$ non nullo

le sottovarietà lineari di dimensione 1 sono le rette

(iii) $\dim L = 2$

$L = \mathbb{R}^2$

l'unica sottovarietà lineare di dimensione 2 del piano affine è il piano affine stesso.

Def: La forma $L = P + \tilde{V}$ è detta forma parametrica della sottovarietà lineare L

Esempio: $L = (1,0) + \langle (1,2) \rangle$

è una retta data in forma parametrica, o equivalentemente, la forma parametrica di L è

$$L : \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = 2\lambda \end{cases}$$

Def: Una sottovarietà lineare L si dice data in forma cartesiana se è definita come insieme delle soluzioni di un sistema lineare (non per forza omogeneo).

Esempio:

$L : x + y - 1 = 0$ è la forma cartesiana della retta

$L = (1,0) + \langle (1,-1) \rangle$ del piano affine.

Oss: Una retta del piano sarà definita da un sistema lineare di rango 1 in due incognite, quindi, in maniera minimale, da una singola equazione lineare (non omogenea in generale).

<u>Def</u>: Due sottovarietà lineari $L_1 = P + V_1$ e $L_2 = Q + V_2$ si dicono parallele se uno dei due spazi direttori è contenuto nell'altro ($V_1 \subseteq V_2$ o $V_2 \subseteq V_1$).

<u>Oss</u>: Un punto è parallelo a qualsiasi sottovarietà lineare, tutto il piano è parallelo a qualsiasi sottovarietà lineare.
Quindi l'unico caso interessante nel piano è tra rette; due rette sono parallele se e solo se hanno stesso spazio direttore.

<u>Esempio</u>: $L_1 : x + y - 2 = 0$ e $L_2 : x + y + 1 = 0$ sono due rette parallele, infatti $L_1 = (2,0) + \langle (1,-1) \rangle$ e $L_2 = (-1,0) + \langle (1,-1) \rangle$.

Posizione reciproca di due rette nel piano.

Siano $r_1 : a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$ e $r_2 : a_2 x_1 + b x_2 = c_2$ due rette del piano affine, allora si possono avere vari casi a seconda della tipologia del sistema

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Oss: Poiché $(a_1,b_1) \neq (0,0) \neq (a_2,b_2)$ si ha

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \geq 1 .$$

caso 1: rette coincidenti $(r_1 = r_2)$

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$$

ossia il sistema è compatibile e le due righe sono proporzionali.

caso 2: rette parallele non coincidenti

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 1 \quad e \quad rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

ossia il sistema non è compatibile quindi r_1 e r_2 non si intersecano e il sottospazio direttore di r_1 è uguale al sottospazio direttore di r_2.

caso 3: rette incidenti

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 2 = rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

il sistema è univocamente risolubile, ossia $r_1 \cap r_2 = P$, r_1 e r_2 si intersecano in un punto.

Tabella riassuntiva

	$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$
rette coincidenti	(1)	1
rette parallele distinte	1	2
rette incidenti	2	(2)