Lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

La definizione dello spazio affine è analoga a quella del piano affine. In questo caso l'insieme dei punti si identifica con $\mathbb{R}^3$ e lo spazio vettoriale [redacted] che ci agisce sopra è $\mathbb{R}^3$.

La definizione di sottovarietà lineari dello spazio affine è analoga al caso del piano.

Tuttavia nello spazio affine ci sono più tipi di sottovarietà lineari rispetto al piano.

Sottovarietà lineari dello spazio affine

<u>dim 0</u>

Punti, $P = (x_1, x_2, x_3)$

<u>dim 1</u>

rette, $L = P + \langle v \rangle$ con $v \in \mathbb{R}^3$ nonnullo

<u>dim 2</u>

piani, $\pi = P + \langle v, w \rangle$ con $v, w \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti

<u>dim 3</u>

tutto lo spazio

Analogamente al caso del piano una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ può essere definita tramite equazioni cartesiane.

<u>rette</u>

$$L: \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \end{cases}$$

dove la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

<u>Oss</u>: Questo è un sistema minimale di equazioni definenti la retta L, L può anche essere definito da un numero maggiore di equazioni, l'importante è che il sistema sia compatibile ed abbia rango 2.

<u>piani</u>

$$\pi: \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \quad \text{con} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$$

<u>Oss</u>: Il piano π può anche essere descritto da un sistema di più equazioni, compatibile e di rango 1.

Anche nello spazio si avranno varie tipologie di posizioni reciproche tra sottovarietà lineari. Andiamo ora ad elencarle.

Posizione reciproca di due piani

$\pi_1 : a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1$ e $\pi_2 : a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$

con $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$ e $(a_2, b_2, c_2) \neq (0,0,0)$

- piani coincidenti $(\pi_1 = \pi_2)$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = 1$$

Il sistema

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \end{cases}$$ che definisce $\pi_1 \cap \pi_2$ è equivalente

alla singola equazione $a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1$ che definisce π_1 (o all'equazione che definisce π_2)

- piani paralleli

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = 2$$

dunque $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ ossia il sistema è incompatibile e le giaciture di π_1 e π_2 coincidono

- piani incidenti

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$, dunque il sistema è compatibile

e $\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \end{cases}$ è una retta

Tabella riassuntiva

	$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$	$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$
piani coincidenti	(1)	1
piani paralleli distinti	1	2
piani incidenti (intersecantisi in una retta)	2	(2)

Posizione reciproca di un piano ed una retta

$$\pi : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \quad \text{con } (a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$$

$$l : \begin{cases} a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases} \quad \text{con } rk\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2$$

- retta contenuta nel piano $(l \cap \pi = l)$

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 2$$

la prima riga è combinazione lineare delle altre due, dunque il sistema che definisce $l \cap \pi$ è equivalente al sistema che definisce l.

- retta e piano paralleli, retta esterna al piano

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2 \quad e \quad rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 3$$

il sistema è incompatibile, dunque $\pi \cap l = \emptyset$
e lo spazio direttore di l è contenuto nello spazio direttore di π, ossia π e l sono paralleli.

- retta e piano incidenti

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 3$$

, dunque il sistema è risolubile ed ammette un'unica sol.

$$\pi \cap l = P.$$

Tabella riassuntiva

	$\text{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$	$\text{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$
retta contenuta nel piano	(2)	2
retta e piano paralleli retta esterna al piano	2	3
retta e piano incidenti in un punto	3	(3)

Posizione reciproca di due rette nello spazio

$$\ell_1 : \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \end{cases} \quad \text{con } rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \quad e$$

$$\ell_2 : \begin{cases} a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 + c_4 x_3 = d_4 \end{cases} \quad \text{con } rk \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = 2 .$$

- rette coincidenti $(\ell_1 = \ell_2)$

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 2$$

il sistema è risolubile ed equivalente a quello che definisce ℓ_1 (oppure a quello che definisce ℓ_2)

- rette parallele distinte

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = 2 \quad e \quad rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 3$$

le rette hanno stesso spazio direttore, ma $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

- rette incidenti

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 3$$

il sistema è compatibile di rango massimo, dunque $\ell_1 \cap \ell_2 = P$.

- rette sghembe, ossia non parallele e non incidenti

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{e} \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 4$$

il sistema è incompatibile, quindi $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ e i sottospazi direttori di l_1 e l_2 sono distinti.

Tabella riassuntiva

	$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$	$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$
rette coincidenti	(2)	2
rette parallele distinte	2	3
rette incidenti in un punto	3	3
rette sghembe	3	4

Esercizio: Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x = y \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

(a) stabilire se le rette r e s sono complanari o sghembe.

(b) Nel caso le rette r e s siano complanari, determinare l'equazione cartesiana del piano che le contiene. Altrimenti determinare il piano contenente r parallelo ad s.

Svolgimento:

(a) 1° metodo: Determiniamo la forma parametrica di r e s.

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema.

$$r = (0,0,0) + \langle (1,1,1) \rangle$$

La retta s è già data in forma parametrica:

$$s = (1,-2,1) + \langle (1,1,1) \rangle$$

Le rette r e s sono parallele.

Poiché $(1,-2,1) \in s$ ma $(1,-2,1) \notin r$, si conclude che r e s sono rette parallele distinte.

2° metodo: Determiniamo la forma cartesiana di r e s.

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Troviamo un sistema di equazioni che definisce s.

$$s: \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Determiniamo la mutua posizione di r e s.

Riduciamo a scala tramite operazioni elementari sulle righe la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\mathrm{I},\ \mathrm{III}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta del sistema definente $r \cap s$ è 2, dunque le rette r e s sono parallele; poiché il rango della matrice completa è 3, le rette r e s sono distinte.

Poiché le rette r e s sono parallele, esse sono complanari.

(b) Il piano contenente r e s avrà giacitura generata dalla direzione comune di r e s e da un vettore congiungente un punto di r con un punto di s.

$$\pi = (0,0,0) + \langle (1,1,1), (1,-2,1) - (0,0,0) \rangle =$$

$$= (0,0,0) + \langle (1,1,1), (1,-2,1) \rangle .$$

Alternativamente si può determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e s imponendo che π passi per $(0,0,0)$ e $(1,-2,1)$ (ossia un punto di r e un punto di s) e che l'equazione della giacitura di π (ossia la parte omogenea dell'equazione di π) sia soddisfatta dalla direzione comune di r e s.

$\pi : ax + by + cz + d = 0$ con le condizioni

$$\begin{cases} d = 0 \\ a - 2b + c + \cancel{d} = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ a = -c \end{cases}$$

si ottiene $\pi : x - z = 0$