Passiamo ora a considerazioni di tipo metrico nello spazio e nel piano.

<u>Def</u>: Chiameremo spazio euclideo usuale lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dove su $V = \mathbb{R}^3$ considereremo pure il prodotto scalare usuale. Chiameremo piano euclideo usuale il piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dove su $V = \mathbb{R}^2$ considereremo il prodotto scalare usuale.

Il prodotto scalare su V ci permette di definire la distanza tra punti dello spazio euclideo usuale o del piano euclideo usuale.

<u>Def</u>: Siano P, Q due punti dello spazio euclideo usuale, la distanza tra P e Q si definisce come segue:

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \| P - Q \|$$

<u>Oss</u>: Una definizione analoga vale per punti del piano euclideo usuale.

<u>Esempio</u>: Siano $P = (3,-1,2)$ e $Q = (2,0,1)$ due punti dello spazio euclideo usuale, allora si ha

$$\operatorname{dist}(P,Q) = \| (3,-1,2) - (2,0,1) \| = \| (1,-1,1) \| =$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

Il prodotto scalare usuale di $\mathbb{R}^n$ permette di definire, oltre alla norma di un vettore, anche la nozione di ortogonalità di due vettori e l'ortogonale di un sottospazio.

Analogamente esso permette di definire la nozione di ortogonalità tra sottovarietà del piano e dello spazio euclideo usuale.

<u>Def</u>: (i) Due rette r_1 e r_2 sono ortogonali se i rispettivi vettori direttori v_1 e v_2 sono ortogonali $(v_1 \bullet v_2 = 0)$.

(ii) Una retta r è ortogonale ad un piano π se il vettore v di r è ortogonale alla giacitura V di π $\left(v \in V^{\perp} \right)$.

(iii) due piani π_1 e π_2, di giaciture V_1 e V_2 rispettivamente, sono ortogonali se $V_1^{\perp}$ è ortogonale a $V_2^{\perp}$.

<u>Esempi</u>:

(i) Le rette $r_1 = (1,1,2) + \langle (3,-2,1) \rangle$ e $r_2 = (5,5,-3) + \langle (1,1,-1) \rangle$ sono ortogonali (infatti $(3,-2,1) \bullet (1,1,-1) = 0$).

(ii) La retta $r = (1,1,2) + \langle (3,-2,1) \rangle$ è ortogonale al piano

[redacted] $\pi : 3x - 2y + z - 6 = 0$

(iii) I piani $\pi_1 : 5x - 3y - z + 10 = 0$ e $\pi_2 : -x - 2y + z - 3 = 0$ sono ortogonali.

<u>Esercizio</u>: Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette

$$r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3y - z = -3 \end{cases} \quad e \quad s: \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r e s.

(b) Determinare il piano ortogonale a r e passante per $P = (2,1,-2)$.

(c) Determinare, se esiste, una retta t incidente con r e s e ortogonale a r e s.

(d) Determinare la distanza tra il punto $A = t \cap r$ e il punto $B = t \cap s$.

<u>Svolgimento</u>:

(a) Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3y - z = -3 \end{cases}$ che definisce r

si ha $r = (2,-1,0) + \langle (1,2,3) \rangle$. Risolvendo il

sistema $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ che definisce s si ha

$s = (1,0,2) + \langle (1,2,-1) \rangle$.

Poiché $(1,2,3)$ e $(1,2,-1)$ sono lin. ind. segue che r e s non sono parallele. Vediamo se sono sghembe o incidenti. Si ha $(1,0,2) - (2,-1,0) = (-1,1,2)$, verifichiamo che $(-1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,2,-1)$ sono lin. ind.

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 12 \neq 0,$$ dunque i tre vettori sono

effettivamente lin. ind. e ne segue che le rette r e s

sono sghembe.

(b) Poiché $r = (2,-1,0) + \langle (1,2,3) \rangle$, il piano ortogonale a r passante per $P = (2,1,-2)$ avrà equazione

$x + 2y + 3z + d = 0$, dove d soddisfa $2 + 2 \cdot 1 + 3(-2) + d = 0$

dato dal passaggio del piano per P.

Dunque il piano cercato ha equazione

$x + 2y + 3z + 2 = 0$.

(c) La retta t avrà direzione $\langle (1,2,3), (1,2,-1) \rangle^{\perp}$ poiché è ortogonale sia a r che a s.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

si ottiene $\langle (1,2,3), (1,2,-1) \rangle^{\perp} = \langle (2,-1,0) \rangle$

Poiché r e t sono incidenti, esse sono complanari ed il piano che le contiene sarà $\pi = (2,-1,0) + \langle (1,2,3), (2,-1,0) \rangle$

Cercando un'equazione per π si ottiene

$\pi: \; 3x + 6y - 5z = 0$

Poiché s e t sono incidenti, esse sono complanari ed il piano che le contiene sarà $\pi' = (1,0,2) + \langle (1,2,-1), (2,-1,0) \rangle$

Cercando un'equazione per π' si ottiene

$\pi': \; x + 2y + 5z - 11 = 0$

Si ha $t = \pi \cap \pi'$, dunque $t: \begin{cases} 3x + 6y - 5z = 0 \\ x + 2y + 5z - 11 = 0 \end{cases}$

(d) Si ha $A = r \cap t = r \cap \pi'$. Calcoliamo $r \cap \pi'$.

Sostituendo

$$x = 2+\lambda$$
$$y = -1+2\lambda$$
$$z = 3\lambda$$

nell'equazione $x+2y+5z-11=0$, si ottiene

$$2+\lambda-2+4\lambda+15\lambda-11=0 \quad \text{cioè} \quad \lambda = \frac{11}{20}$$

Quindi $A = \left(\frac{51}{20}, \frac{2}{20}, \frac{33}{20}\right)$

Si ha $B = s \cap t = s \cap \pi$. Calcoliamo $s \cap \pi$.

Sostituendo

$$x = 1+\lambda$$
$$y = 2\lambda$$
$$z = 2-\lambda$$

nell'equazione $3x+6y-5z=0$, si ottiene

$$3+3\lambda+12\lambda-10+5\lambda=0 \quad \text{cioè} \quad \lambda = \frac{7}{20}$$

Quindi $B = \left(\frac{27}{20}, \frac{14}{20}, \frac{33}{20}\right)$.

$$A-B = \left(\frac{24}{20}, -\frac{12}{20}, 0\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}, 0\right).$$

Dunque $\mathrm{dist}(A,B) = \|A-B\| = \frac{1}{5}\sqrt{36+9}$

$$= \frac{\sqrt{45}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$