Abbiamo visto che nello spazio euclideo usuale è possibile definire la distanza tra due punti, ora vediamo come si estende la definizione di distanza a sottovarietà lineari dello spazio euclideo usuale e come calcolare tale distanza.

<u>Def</u>: Siano L_1 e L_2 due sottovarietà lineari dello spazio euclideo usuale, la distanza tra L_1 e L_2 è definita come segue

$$\text{dist}(L_1, L_2) = \min_{\substack{P \in L_1 \\ Q \in L_2}} \| P - Q \|$$

Ossia è definita come la minima distanza tra un punto di L_1 e un punto di L_2.

<u>Oss</u>: Si ha $\text{dist}(L_1, L_2) = 0$ se e solo se L_1 e L_2 si intersecano (infatti $\| P - Q \| = 0 \iff P = Q$).

Vediamo come calcolare tale distanza nei vari casi.

Distanza punto - retta nel piano.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto del piano euclideo usuale,
sia $r : ax + by + c = 0$ una retta del piano euclideo usuale.

Sia Q un punto di r, è possibile decomporre il vettore $P_0 - Q$ nella somma $P_0 - Q = (P_0 - Q)_{//} + (P_0 - Q)_{\perp}$,
dove $(P_0 - Q)_{//} \in \langle (b, -a) \rangle$ è parallelo ad r e $(P_0 - Q)_{\perp} \in \langle (a, b) \rangle$ è ortogonale ad r.

Se Q' è un altro punto di r, si ha $P_0 - Q' = (P_0 - Q) + (Q - Q')$.
Osservando che $Q - Q' \in \langle (b, -a) \rangle$, ossia è parallelo ad r, si conclude che $(P - Q)_{\perp} = (P - Q')_{\perp}$.
Cioè tutti i vettori congiungenti un punto di r con P_0 hanno tutti stessa componente ortogonale a r.

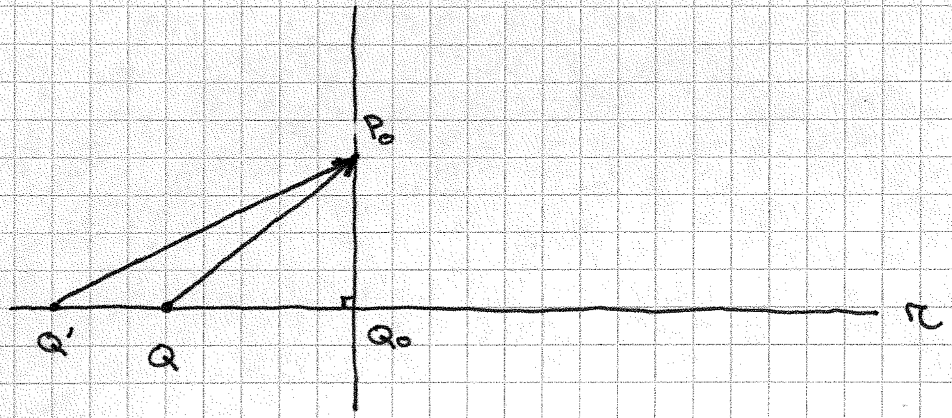
Dunque la minima [redacted] distanza si ottiene quando $P_0 - Q$ è ortogonale a r. Per un punto qualsiasi Q di r, la componente di $P_0 - Q$ ortogonale a r sarà

$$(P_0 - Q)_{\perp} = \left((P_0 - Q) \cdot \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|} \right) \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|}$$

Dunque $\|(P_0 - Q)_{\perp}\| = \dfrac{|(P_0 - Q) \cdot (a, b)|}{\|(a, b)\|}$

Poiché $Q = (x_1, y_1) \in r$, si ha $(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot (a, b) =$
$= a x_0 + b y_0 - a x_1 - b y_1 = a x_0 + b y_0 + c$

distanza di un punto da una retta nel piano



$$(P_0 - Q)_\perp = (P_0 - Q')_\perp = P_0 - Q_0$$

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \mathrm{dist}(P_0, Q_0) = \| P_0 - Q_0 \|$$

Dunque si conclude che

$$\operatorname{dist}(P_0, r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

<u>Esempio</u>: Se $P=(2,-4)$ e $r: \ x+2y-1=0$ si ha

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{|2+2(-4)-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

<u>Oss</u>: La distanza tra sottovarietà lineari è sempre un numero non negativo.

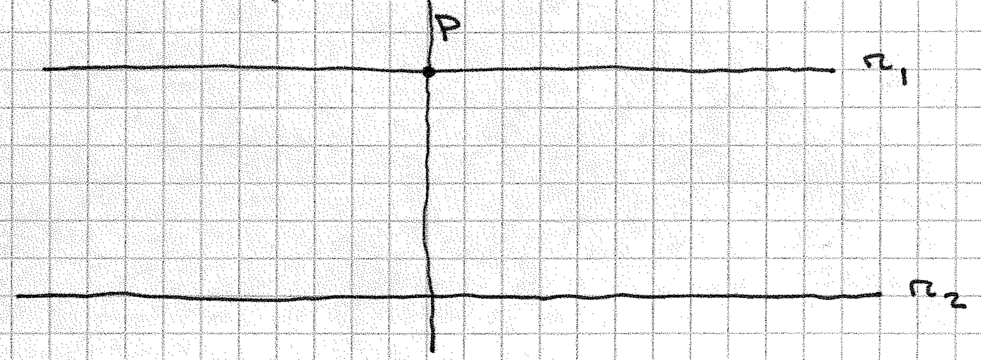
Distanza tra due rette parallele del piano.

Per calcolare la distanza tra due rette parallele r_1 e r_2, si prende un punto $P \in r_1$ e si ha

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \operatorname{dist}(P, r_2)$$

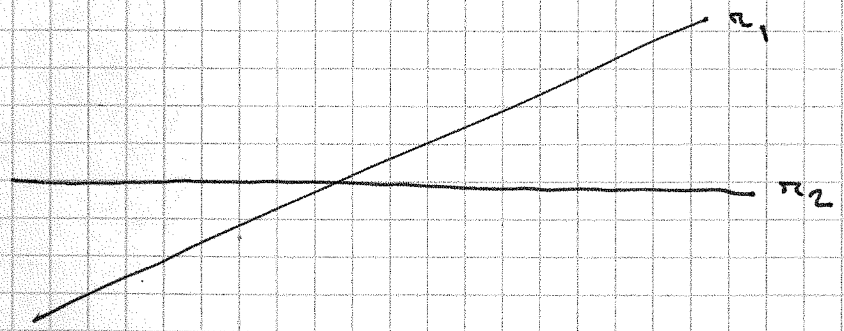
<u>Oss</u>: Questa uguaglianza è vera solo per rette parallele, per rette incidenti la distanza è nulla.

distanza tra due rette parallele del piano



$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P, r_2)$$

distanza tra due rette incidenti



$$\text{dist}(r_1, r_2) = 0$$

Passiamo allo spazio euclideo usuale.

Distanza punto-piano.

Sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto dello spazio e

$\pi : ax + by + cz + d = 0$ un piano dello spazio, analogamente al caso del piano già trattato, se $Q \in \pi$ si può decomporre

$$P - Q = (P-Q)_{\parallel} + (P-Q)_{\perp}$$

in somma di un vettore parallelo a π e di un vettore ortogonale a π.

Se $Q' \in \pi$ è un altro punto del piano π si ha

$$P - Q' = (P-Q) + (Q-Q')$$

con $Q - Q'$ parallelo a π,

dunque $(P-Q)_{\perp} = (P-Q')_{\perp}$ è il vettore di minima lunghezza congiungente P con un punto di π.

Inoltre si ha
$$(P-Q)_{\perp} = \left((P-Q) \cdot \frac{(a,b,c)}{\|(a,b,c)\|} \right) \frac{(a,b,c)}{\|(a,b,c)\|}$$

Dunque
$$\operatorname{dist}(P, \pi) = \frac{|(P-Q) \cdot (a,b,c)|}{\|(a,b,c)\|}$$

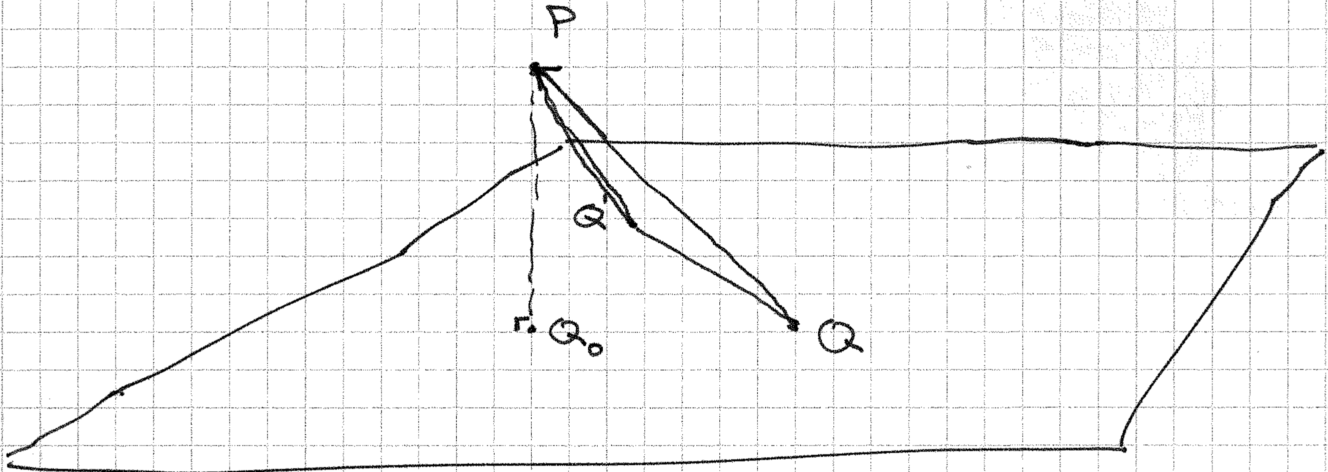
Se $Q = (x_1, y_1, z_1)$ si ha

$$(P-Q) \cdot (a,b,c) = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (a,b,c) =$$

$$= a x_0 + b y_0 + c z_0 - a x_1 - b y_1 - c y_1 =$$

$$= a x_0 + b y_0 + c z_0 + d$$

distanza di un punto da un piano nello spazio



$$(P-Q)_\perp = (P-Q')_\perp = P-Q_0$$

$$\text{dist}(P,\pi) = \text{dist}(P,Q_0) = \|P-Q_0\|$$

Si conclude che si ha

$$\operatorname{dist}(P,\pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

<u>Esempio</u>: Se $P = (1,2,-2)$ e $\pi : -x+3y+2z-5=0$

si ha

$$\operatorname{dist}(P,\pi) = \frac{|-1+3(2)+2(-2)-5|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}$$

$$= \frac{|-4|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} .$$

<u>Distanza tra una retta e un piano paralleli.</u>

Se r e π sono una retta e un piano paralleli, se P è un qualsiasi punto di r, si ha

$$\operatorname{dist}(r,\pi) = \operatorname{dist}(P,\pi) .$$

<u>Distanza tra due piani paralleli.</u>

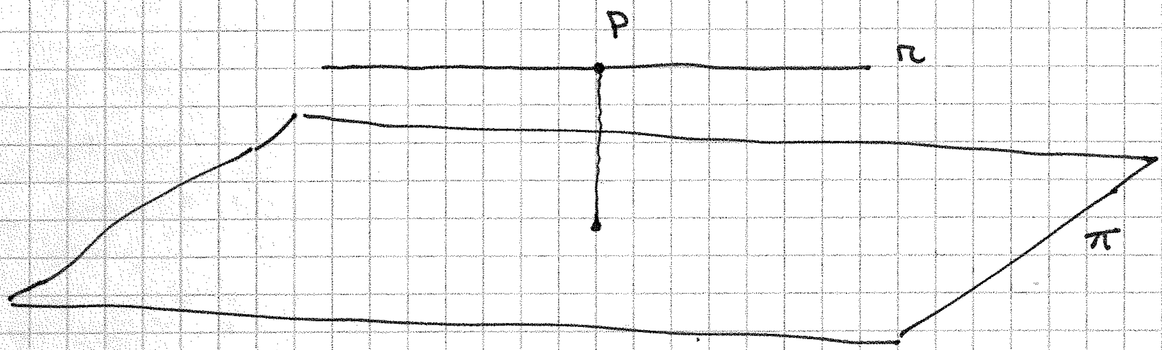
Se π_1 e π_2 sono due piani paralleli, se $P \in \pi_1$, si ha

$$\operatorname{dist}(\pi_1,\pi_2) = \operatorname{dist}(P,\pi_2) .$$

<u>Oss</u>: Nel caso di rette o piani incidenti la distanza è nulla.

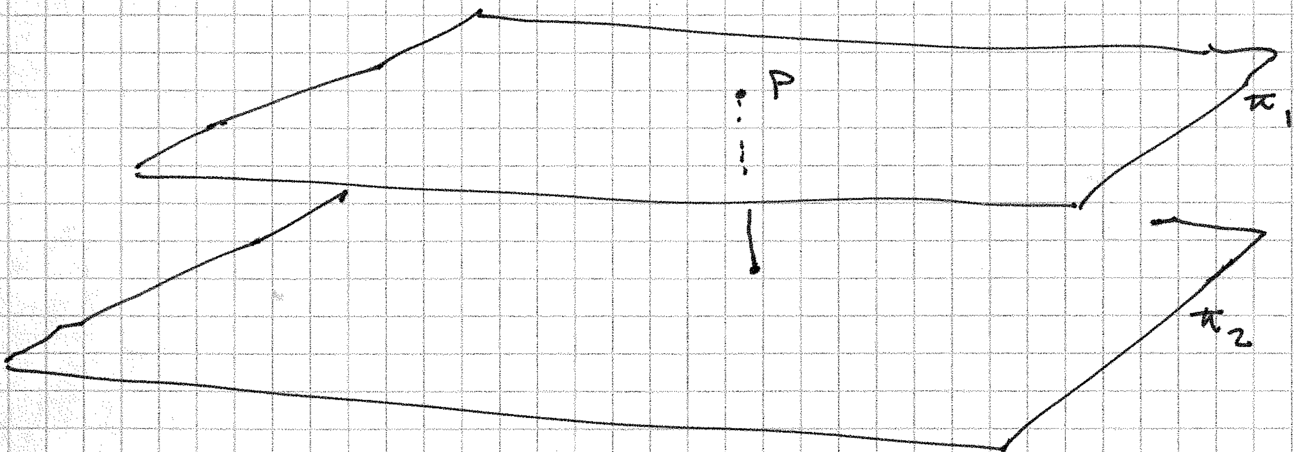
14/6/10

distanza tra una retta e un piano paralleli



$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(P, \pi)$$

distanza tra due piani paralleli



$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(P, \pi_2)$$

Distanza di un punto da una retta nello spazio.

Sia P un punto dello spazio euclideo usuale e sia r una retta dello spazio euclideo usuale.

Se π è il piano ortogonale a r passante per P, e $Q = r \cap \pi$, allora si ha

$$\mathrm{dist}(P, r) = \mathrm{dist}(P, Q)$$

Distanza tra due rette parallele nello spazio.

Se r_1 e r_2 sono due rette parallele nello spazio euclideo usuale, e P è un qualsiasi punto di r_1, si ha

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(P, r_2).$$

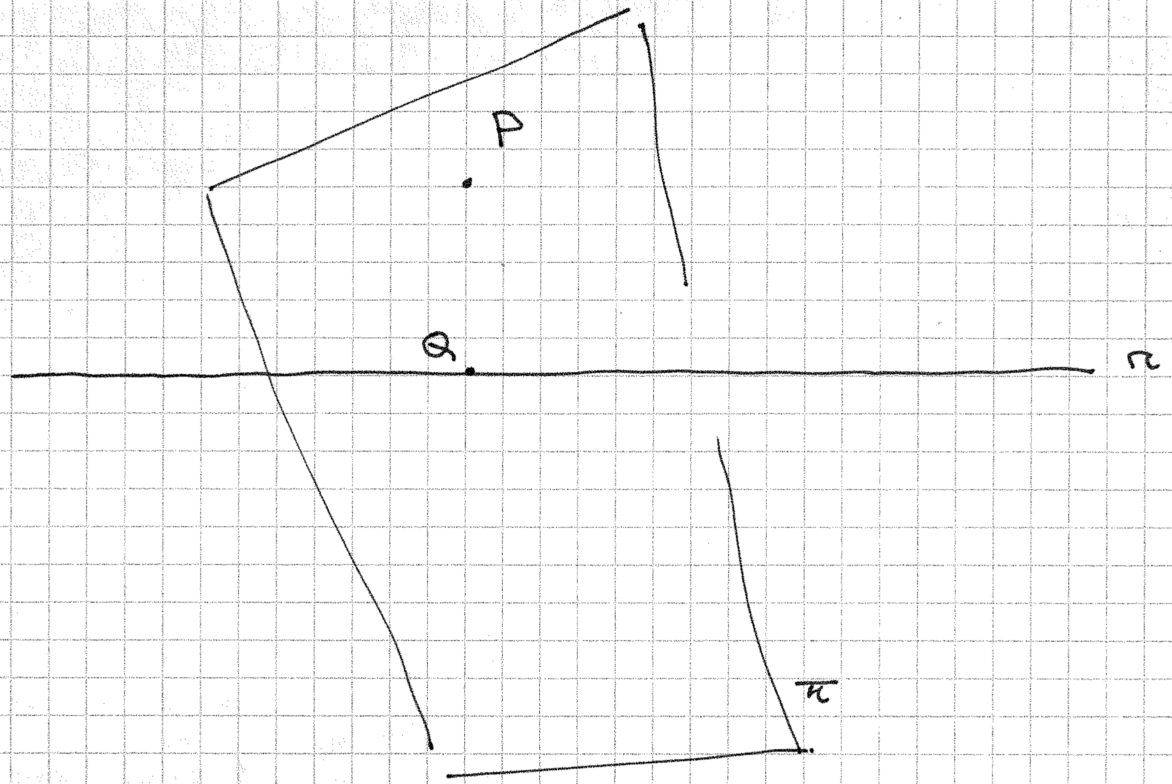
Esercizio: Determinare la distanza tra le rette
$r_1 = (1,0,0) + \langle (1,-1,1) \rangle$ e $r_2 = (0,1,1) + \langle (1,-1,1) \rangle$.

Svolgimento: Le rette r_1 e r_2 hanno stessa direzione dunque sono parallele.

Il piano π ortogonale a r_1 e r_2 e passante per $(1,0,0)$ è del tipo $\pi: x - y + z - d = 0$, poiché $(1,0,0) \in \pi$ si ottiene $d = 1$, cioè $\pi: x - y + z - 1 = 0$.

Il punto d'intersezione $Q = r_2 \cap \pi$ tra la retta r_2 ed il piano π sarà del tipo $Q = (0,1,1) + \alpha(1,-1,1)$.
Poiché $Q \in \pi$ si ottiene $3\alpha - 1 = 0$, ossia $\alpha = 1/3$

distanza di un punto da una retta nello spazio

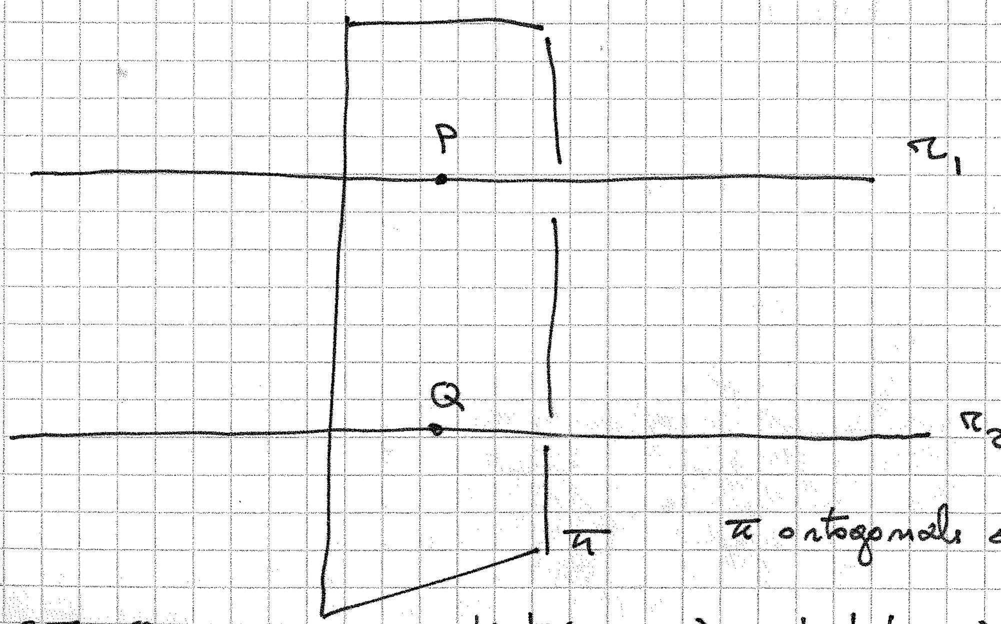


π piano ortogonale a r passante per P

$Q = r \cap \pi$

$$\mathrm{dist}(P, r) = \mathrm{dist}(P, Q) = \| P - Q \|$$

distanza di due rette parallele nello spazio



π ortogonale a r_1 e r_2

$P = r_1 \cap \pi$, $Q = r_2 \cap \pi$ $\qquad \mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(P, Q) = \| P - Q \|$

cioè $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Dunque

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \| (1,0,0) - \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}\right) \| =$$

$$= \| \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3}\right) \| = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

(2° metodo)

Decomponiamo il vettore $(1,0,0)-(0,1,1)$ in una somma di una componente parallela a r_1 e r_2 ed una componente ortogonale a r_1 e r_2.

$$(1,-1,-1) = (1,-1,-1)_{/\!/} + (1,-1,-1)_{\perp}$$

con $(1,-1,-1)_{/\!/} \in \langle (1,-1,1) \rangle$ e $(1,-1,-1)_{\perp} \in \langle (1,-1,1) \rangle^{\perp}$

Abbiamo la formula

$$(1,-1,-1)_{/\!/} = \left((1,-1,-1) \cdot \frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|} \right) \frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|} =$$

$$= \frac{1}{3}(1,-1,1)$$

Dunque $(1,-1,-1)_{\perp} = (1,-1,-1) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Segue che

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \| ((1,0,0)-(0,1,1))_{\perp} \| =$$

$$= \| \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3}\right) \| = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

<u>Esercizio</u>: Determinare la distanza tra la retta

$r = (1,0,0) + \langle (1,-1,1) \rangle$ ed il piano

$\pi = (2,-1,3) + \langle (1,0,-1), (0,1,-2) \rangle$.

<u>Svolgimento</u>: Poiché $(1,-1,1) = (1,0,-1) - (0,1,-2)$ si ha

$\langle (1,-1,1) \rangle \subset \langle (1,0,-1), (0,1,-2) \rangle$, quindi r e π

sono paralleli.

Per determinare la distanza di r da π determiniamo un'equazione cartesiana di π.

Si ha $\pi: x + 2y + z - 3 = 0$.

Allora l'uguaglianza

$$\mathrm{dist}(r,\pi) = \mathrm{dist}((1,0,0),\pi)$$

permette di concludere

$$\mathrm{dist}(r,\pi) = \frac{|1 + 2(0) + 0 - 3|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Prima di studiare la distanza tra due rette sghembe nello spazio euclideo usuale introduciamo il prodotto vettoriale.

Il prodotto vettoriale è un'operazione che ad una coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ associa un vettore di $\mathbb{R}^3$.

<u>Def</u>: Siano $v = (m, n, p)$ e $w = (m', n', p')$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si definisce il prodotto vettoriale di v e w nel seguente modo:

$$v \times w = \left(\det \begin{pmatrix} n & p \\ n' & p' \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} m & p \\ m' & p' \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix} \right)$$

Il prodotto vettoriale ha le seguenti proprietà:

(i) $v \times w$ è ortogonale sia a v che a w

(ii) $\| v \times w \|$ è l'area del parallelogramma di lati v e w

(iii) $v \times w = 0$ se e solo se v e w sono lin. dip.

(iv) $v \times w = - w \times v$

(v) $v \times (w + z) = (v \times w) + (v \times z)$, $v \times (\alpha w) = \alpha (v \times w)$.

(ossia il prodotto vettoriale è bilineare)