Applicheremo il prodotto vettoriale ai seguenti problemi:

(a) Data una base di un sottospazio di dim 2 di $\mathbb{R}^3$, trovare un' equazione che lo definisca.

(a') Determinare l'ortogonale di un sottospazio di dim 2 di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare l'equazione di un piano nello spazio affine.

(c) Determinare la distanza tra due rette sghembe nello spazio euclideo usuale.

<u>Esercizio a</u>: Sia $W = \langle (2,1,1), (3,-1,2) \rangle$, determinarne un' equazione cartesiana.

<u>Svolgimento</u>:

Calcoliamo $(2,1,1) \times (3,-1,2)$:

$$(2,1,1) \times (3,-1,2) = \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (3, -1, -5)$$

W ha equazione $3x - y - 5z = 0$.

Esercizio a': Sia $U = \langle (1,2,-3), (3,-5,1) \rangle$, determinare $U^\perp$.

Svolgimento: Calcoliamo il prodotto vettoriale $(1,2,-3) \times (3,-5,1)$:

$$(1,2,-3) \times (3,-5,1) = \left(\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (-13, -10, -11)$$

Si ha $U^\perp = \langle (-13,-10,-11) \rangle = \langle (13,10,11) \rangle$.

Esercizio b': Sia $\pi = (1,1,0) + \langle (1,2,1), (1,-1,2) \rangle$, determinare un'equazione di π.

Svolgimento: Calcoliamo il prodotto vettoriale $(1,2,1) \times (1,-1,2)$:

$$(1,2,1) \times (1,-1,2) = \left(\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (5, -1, -3)$$

Il piano π avrà equazione $5x - y - 3z + d = 0$, imponiamo che π passi per $(1,1,0)$ per determinare d:

$$(1,1,0) \in \pi \iff 5 \cdot 1 - 1 - 3 \cdot 0 + d = 0 \iff d = -4$$

Dunque $\pi : 5x - y - 3z - 4 = 0$.

<u>Esercizio c</u>: Date le rette $r = (1,1,0) + \langle (1,2,-1) \rangle$ e $s = (2,3,-1) + \langle (3,0,1) \rangle$, calcolare la distanza tra r e s.

<u>Svolgimento</u>:

Poiché $(1,2,-1)$ e $(3,0,1)$ sono lin. ind., le rette r e s non sono parallele.

Dalla dimensione generale della distanza tra sottovarietà lineari abbiamo visto che la distanza tra r e s è la norma della proiezione ortogonale di $(1,1,0) - (2,3,-1)$ su $\langle (1,2,-1), (3,0,1) \rangle^{\perp}$.

Per calcolare tale proiezione ortogonale è necessario determinare un versore di $\langle (1,2,-1), (3,0,1) \rangle^{\perp}$.

Usando il prodotto vettoriale si ha che tale versore è

$$\frac{(1,2,-1) \times (3,0,1)}{\|(1,2,-1) \times (3,0,1)\|} = \frac{(2,-4,-6)}{\|(2,-4,-6)\|} = \frac{(1,-2,-3)}{\sqrt{14}}$$

La proiezione ortogonale di $(1,1,0) - (2,3,-1) = (-1,-2,1)$ su $\langle (1,2,-1), (3,0,1) \rangle^{\perp}$ è quindi

$$\left((-1,-2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (1,-2,-3) \right) \frac{1}{\sqrt{14}} (1,-2,-3)$$

la norma di tale vettore è $\left| (-1,-2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (1,-2,-3) \right| = 0$

La distanza tra r e s è nulla, le rette sono quindi incidenti.

Esercizio c bis: Date le rette $r = (-1,3,0) + \langle (1,2,-1) \rangle$ e $s = (0,0,1) + \langle (3,0,2) \rangle$ determinarne la distanza.

Svolgimento: $(1,2,-1)$ e $(3,0,2)$ sono lin. ind. dunque r e s non sono parallele.

Troviamo un versore di $\langle (1,2,-1), (3,0,2) \rangle^{\perp}$ usando il prodotto vettoriale. Tale versore sarà

$$\frac{(1,2,-1) \times (3,0,2)}{\|(1,2,-1) \times (3,0,2)\|} = \frac{(4,-5,-6)}{\|(4,-5,-6)\|} = \frac{1}{\sqrt{77}}(4,-5,-6)$$

La proiezione ortogonale di $(0,0,1) - (-1,3,0) = (1,-3,1)$ su $\langle (1,2,-1), (3,0,2) \rangle^{\perp}$ è

$$\left((1,-3,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{77}}(4,-5,-6) \right) \frac{1}{\sqrt{77}}(4,-5,-6)$$

La sua norma è

$$\left| (1,-3,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{77}}(4,-5,-6) \right| = \frac{13}{\sqrt{77}}$$

Dunque la distanza tra r e s è

$$\mathrm{dist}(r,s) = \frac{13}{\sqrt{77}}$$

. Le rette sono sghembe.

<u>Oss</u>: Siano $r = P + \langle v \rangle$ e $s = Q + \langle w \rangle$ due rette non parallele dello spazio euclideo usuale (ossia v e w sono lin. ind.). Dall'esercizio c ricaviamo la seguente formula generale per la distanza tra r e s:

$$\mathrm{dist}(r,s) = \frac{|(P-Q)\cdot(v \times w)|}{\|v \times w\|}$$

Un altro metodo per calcolare la distanza tra due rette sghembe è quello di calcolare i punti di minima distanza.

Siano $r = P + \langle v \rangle$ e $s = Q + \langle w \rangle$ due rette sghembe dello spazio euclideo usuale.

La retta $t = \pi_1 \cap \pi_2$, dove $\pi_1 = P + \langle v, v \times w \rangle$ e $\pi_2 = Q + \langle w, v \times w \rangle$, è detta retta di minima distanza tra r e s. I punti $P_1 = r \cap t$ e $P_2 = s \cap t$ sono i punti che realizzano la minima distanza tra r e s:

$$\mathrm{dist}(r,s) = \mathrm{dist}(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\| .$$

Un ulteriore metodo di calcolo di $\mathrm{dist}(r,s)$ è quello di calcolare il piano $\pi = Q + \langle v, w \rangle$ contenente s e parallelo a r, si ha

$$\mathrm{dist}(r,s) = \mathrm{dist}(r, \pi) = \mathrm{dist}(P, \pi) .$$

Esercizio: Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni cartesiane

$$r_1: \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x + 2y + z + 6 = 0 \\ x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una forma parametrica delle rette r_1 e r_2.

(b) Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2. Calcolare la distanza tra r_1 e r_2.

(c) Determinare un piano π parallelo a r_1 e r_2 ed equidistante da r_1 e r_2.

(d) Determinare dei punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ che abbiano la stessa proiezione ortogonale sul piano π.

Svolgimento:

Risolviamo il sistema che definisce r_1:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{II-2I} \begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3 \\ \quad y + z = 3 \end{cases} \qquad \text{la variabile libera è } z$$

per $z = 0$ otteniamo la soluzione particolare $(0,3,0)$.
per $z = 1$ la soluzione dell'omogenea associata che si ottiene è $(1,-1,1)$, dunque $r_1 = (0,3,0) + \langle(1,-1,1)\rangle$.

Risolviamo il sistema che definisce r_2:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+2y+z=-6 \\ -y+z=3 \end{cases}$$ la variabile libera è z.

Per $z=0$ si ottiene la soluzione particolare $(0,-3,0)$, per $z=1$ la soluzione dell'omogenea associata che si ottiene è $(-3,1,1)$, dunque $r_2 = (0,-3,0) + \langle(-3,1,1)\rangle$.

(b) Poiché $(1,-1,1)$ e $(-3,1,1)$ sono lin. ind. è possibile calcolare la distanza con la formula

$$\mathrm{dist}(r_1,r_2) = \frac{\left|\left((0,3,0)-(0,-3,0)\right)\bullet\left((1,-1,1)\times(-3,1,1)\right)\right|}{\|(1,-1,1)\times(-3,1,1)\|}$$

Dunque

$$\mathrm{dist}(r_1,r_2) = \frac{|(0,6,0)\bullet(-2,-4,-2)|}{\|(-2,-4,-2)\|} =$$

$$= \frac{|(0,6,0)\bullet(1,2,1)|}{\|(1,2,1)\|} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

La distanza non è nulla, dunque le rette sono sghembe.

(c) Il piano π avrà giacitura $\langle (1,-1,1), (-3,1,1) \rangle$.

Usando il prodotto vettoriale $(1,-1,1) \times (-3,1,1) = (-2,-4,-2)$,

si ha che la giacitura di π ha equazione $x+2y+z=0$

Dunque π ha equazione $\pi : x+2y+z+d=0$

Poiché π è parallelo a π_1 e π_2 si ha

$$\text{dist}(\pi_1, \pi) = \text{dist}((0,3,0), \pi)$$

e

$$\text{dist}(\pi_2, \pi) = \text{dist}((0,-3,0), \pi)$$

Usando la formula per la distanza di un punto da un piano si ottiene

$$\text{dist}(\pi_1, \pi) = \frac{|6+d|}{\sqrt{6}}$$

e $$\text{dist}(\pi_2, \pi) = \frac{|-6+d|}{\sqrt{6}}$$

Imponendo $\text{dist}(\pi_1, \pi) = \text{dist}(\pi_2, \pi)$ si ottiene

$$\frac{|6+d|}{\sqrt{6}} = \frac{|-6+d|}{\sqrt{6}}$$

da cui $|d+6| = |d-6|$, elevando ambo i membri al quadrato si ottiene $(d-6)^2 = (d+6)^2$, cioè $d=0$.

Dunque il piano cercato è $\pi : x+2y+z=0$

(d) La proiezione ortogonale di un punto P sul piano π si ottiene intersecando la retta ortogonale a π per P con il piano π.

Se due punti hanno stessa proiezione ortogonale su π vuol dire che giacciono sulla stessa retta ortogonale di π.

Poiché π_1 e π_2 sono sghembe, esistono solo due punti $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$ con queste proprietà, sono i punti di minima distanza.

Determiniamo tali punti.

Determiniamo la retta t di minima distanza.

$\pi_1 = (0,3,0) + \langle (1,-1,1), (1,2,1) \rangle$

Poiché $(1,-1,1) \times (1,2,1) = (-3,0,3)$ si ha che π_1 ha equazione $x - z + d = 0$, $d = 0$ poiché $(0,3,0) \in \pi_1$.

Dunque $\pi_1 : x - z = 0$

$\pi_2 = (0,-3,0) + \langle (-3,1,1), (1,2,1) \rangle$

Poiché $(-3,1,1) \times (1,2,1) = (-1,4,-7)$, π_2 ha equazione $\pi_2 : x - 4y + 7z + d = 0$ e poiché $(0,-3,0) \in \pi_2$ si ha $d = -12$, cioè $\pi_2 : x - 4y + 7z - 12 = 0$.

Segue che t ha equazioni

$$t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

Intersechiamo t con r_1:

$$r_1: \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 3-\alpha \\ z = \alpha \end{array} \quad , \quad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

mettendo a sistema si ottiene

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha - 12 + 4\alpha + 7\alpha - 12 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad \alpha = 2$$

cioè $r_1 \cap t = (2,1,2)$

Intersechiamo t con r_2:

$$r_2: \begin{array}{l} x = -3\alpha \\ y = -3+\alpha \\ z = \alpha \end{array} \quad , \quad t: \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

mettendo a sistema si ottiene

$$\begin{cases} -3\alpha - \alpha = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad \alpha = 0$$

cioè $r_2 \cap t = (0,-3,0)$

I punti $P_1 = (2,1,2)$ e $P_2 = (0,-3,0)$ sono i punti di minima distanza di r_1 da r_2 ed hanno stessa proiezione ortogonale su π.

$$\left[\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, P_2) = \| P_1 - P_2 \| = \| (2,4,2) \| = 2\sqrt{6} . \right.$$