Foglio di esercizi 4

Esercizio 1:

Operando sui generatori di W tramite operazioni elementari si trova una base di W:

$$
\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 & -7 \end{matrix}
\xrightarrow[\text{V}-2\text{I}]{\text{IV}-2\text{I}}
\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -9 \end{matrix}
\xrightarrow[\text{V}+3\text{II}]{\text{IV}-\text{III}}
\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{matrix}
\longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow
\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}
\xrightarrow{\text{III}+\text{II}}
\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}
\xrightarrow{\text{IV}-\text{III}}
\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}
$$

Una base di W è $\{(1,0,1,0,1), (0,1,-1,2,3), (0,0,-2,3,0)\}$

Un sottospazio W' tale che $W \oplus W' = \mathbb{R}^5$ è ad esempio

$$\langle (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1) \rangle.$$

Esercizio 2:

Risolviamo il sistema che definisce V riducendo il sistema in forma a scala tramite operazioni elementari:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3\text{I}]{\text{II}-2\text{I} \quad \text{III}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{IV}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema ottenuto è

$$\begin{cases} x + y - z - u + v + w = 0 \\ -y + z \quad -2v = 0 \\ 2z = 0 \\ v - w = 0 \end{cases}$$

le variabili libere sono u, w

per $(u,w) = (1,0)$ si ottiene $(1,0,0,1,0,0)$

per $(u,w) = (0,1)$ si ottiene $(0,-2,0,0,1,1)$

dunque una base di V è $\{(1,0,0,1,0,0), (0,-2,0,0,1,1)\}$

poiché ~~[illegible]~~ le variabili libere erano u, w, un completamento ad una base di $\mathbb{R}^6$ della base trovata di V è ad esempio

$$\{(1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (1,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,-2,0,0,1,$$

Esercizio 3: Sia $ax+by+cz+dw=0$ la generica equazione lineare nelle variabili x,y,z,w. Imponendo che sia verificata dai generatori di V, si ottiene il sistema nelle variabili a,b,c,d:

$$\begin{cases} a+2b+c=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ -a+b-4c-3d=0 \end{cases}$$

Riducendo a scala tramite operazioni elementari si ottiene

$$\xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{cases} a+2b+c=0 \\ -b+c+d=0 \\ 3b-3c-3d=0 \end{cases}$$

dunque il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} a+2b+c=0 \\ -b+c+d=0 \end{cases}$$

le variabili libere sono c,d

per $(c,d)=(1,0)$ si ottiene $(a,b,c,d)=(-3,1,1,0)$

per $(c,d)=(0,1)$ si ottiene $(a,b,c,d)=(-2,1,0,1)$

dunque

$$V: \begin{cases} -3x+y+z=0 \\ -2x+y+w=0 \end{cases} \qquad \dim V = 2$$

Un esempio di un tale V' si ottiene ad esempio togliendo un'equazione al sistema che definisce V:

$$V': -2x+y+w=0, \text{ cioè } V'=\langle(1,2,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,2)\rangle$$

Esercizio 4: Fissiamo la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

Considerando le coordinate rispetto a questa base siamo condotti a considerare il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\tilde{W} = \langle (2,-1,1,0), (1,-1,-1,0), (-3,3,-3,2), (1,1,-1,2), (0,1,0,1) \rangle$$

e siamo condotti a cercare una base di questo sottospazio. Usando le operazioni elementari sui generatori di $\tilde{W}$ si ottiene una base di $\tilde{W}$:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 2 \end{matrix} \xrightarrow[\mathrm{V}+3\mathrm{I}]{\mathrm{III}-\mathrm{I} \quad \mathrm{IV}-2\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II} \quad \mathrm{IV}-\mathrm{II}} \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{V}+2\mathrm{IV}} \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

si deduce che una base di $\tilde{W}$ è $\{(1,-1,-1,0), (0,1,0,1), (0,0,3,-1)\}$ che si può completare alla seguente base di $\mathbb{R}^4$:

$\{(1,-1,-1,0), (0,1,0,1), (0,0,3,-1), (0,0,0,1)\}$

Usando l'isomorfismo inverso di $M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definito dalla scelta della base fatta, si ottiene una base di W:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ che si completa alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

Si può prendere $W' = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

<u>Esercizio 5:</u> Riducendo il sistema a scala tramite operazioni elementari si ottiene

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \xrightarrow[\mathrm{IV}+3\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I} \quad \mathrm{III}-2\mathrm{I}} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & -2 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\mathrm{IV}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} - a_{13} + a_{21} - a_{22} - a_{23} = 0 \\ a_{12} + a_{13} - 3a_{21} + a_{22} = 0 \\ 2a_{13} - 3a_{21} + a_{22} = 0 \end{cases}$$

le variabili libere sono a_{21}, a_{22}, a_{23}

per $(a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (1,0,0)$ si ottiene $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

per $(a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (0,1,0)$ si ottiene $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

per $(a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (0,0,1)$ si ottiene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dunque

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base di U

che si può completare alla seguente base di $M_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

<u>Esercizio 6</u>: Fissando la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ si ha un isomorfismo $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$, siamo ricondotti a trovare delle equazioni per $\tilde{V} = \langle (3,-1,1,4), (1,1,1,2), (0,2,1,1) \rangle$

troviamo una base di $\tilde{V}$:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{matrix} \xrightarrow{\overline{III}-3\overline{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{matrix} \xrightarrow{\overline{III}+2\overline{II}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

dunque $\{(1,1,1,2), (0,2,1,1)\}$ è una base di $\tilde{V}$ e quindi

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di V.

la generica equazione lineare nelle variabili $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ è

$$a\, a_{11} + b\, a_{12} + c\, a_{21} + d\, a_{22} = 0$$

imponendo che sia verificata dai generatori di V si ottiene

$$\begin{cases} a + b + c + 2d = 0 \\ 2b + c + d = 0 \end{cases}$$

le variabili libere sono c, d

per $(c,d) = (1,0)$ si ottiene $(a,b,c,d) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

per $(c,d) = (0,1)$ si ottiene $(a,b,c,d) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

dunque delle equazioni cartesiane per V sono

$$V: \begin{cases} a_{11} + a_{12} - 2a_{21} = 0 \\ 3a_{11} + a_{12} - 2a_{22} = 0 \end{cases}$$

Un V' con le proprietà richieste si ottiene togliendo un'equazione al sistema che definisce V, ad esempio:

$$V': a_{11} + a_{12} - 2a_{21} = 0$$

cioè $V' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Esercizio 7: Scegliendo la base $\{x^3, x^2, x, 1\}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ si ha un isomorfismo $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4$, siamo condotti a trovare delle equazioni cartesiane per

$$\tilde{V} = \langle (-1,4,1,3), (1,2,1,1), (2,1,1,0) \rangle$$

usando le operazioni elementari sui generatori di $\tilde{V}$ otteniamo una base di $\tilde{V}$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{matrix} \xrightarrow{\text{III}+2\text{II}} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\{(1,2,1,1), (0,3,1,2)\}$ è una base di $\tilde{V}$. Dunque $\dim V = \dim \tilde{V} = 2$.

Imponendo che l'equazione generica $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ valga per questi due vettori si ottiene

$$\begin{cases} a' + 2b' + c' + d' = 0 \\ 3b' + c' + 2d' = 0 \end{cases}$$ le variabili libere sono c', d'

per $(c', d') = (1,0)$ si ottiene $(a', b', c', d') = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right)$

per $(c', d') = (0,1)$ si ottiene $(a', b', c', d') = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1\right)$

poiché (a',b',c',d') sono i coefficienti della generica equazione lineare $a'a + b'b + c'c + d'd$ nelle variabili a,b,c,d si ha che il sottospazio V è definito dalle equazioni

$$\begin{cases} a+b-3c = 0 \\ a-2b+3d = 0 \end{cases}$$

Un esempio di V' con le proprietà richieste si ottiene togliendo un'equazione dal sistema che definisce V:

$$V' : a+b-3c = 0 \qquad \text{cioè } V' = \langle 3X^2+X,\ X^3-X^2,\ 1 \rangle$$

<u>Esercizio 8</u>: Risolviamo il sistema riducendolo a scala tramite operazioni elementari.

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{matrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-2\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{matrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\mathrm{II}]{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al seguente

$$\begin{cases} a-b+c+d = 0 \\ 2b+d = 0 \end{cases} \qquad \text{le variabili libere sono } c,d$$

per $(c,d) = (1,0)$ si ottiene $(a,b,c,d) = (-1,0,1,0)$

per $(c,d) = (0,1)$ si ottiene $(a,b,c,d) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1)$

dunque una base di U è $\{ X^3 - X,\ 3X^3 + X^2 - 2 \}$

poiché le variabili vincolate sono a,b un completamento di tale base ad una base di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ è

$$\{ X^3,\ X^2,\ X^3-X,\ 3X^3+X^2-2 \}.$$

Esercizio 9: Fissando la base $\{x^3, x^2, x, 1\}$ si ha un isomorfismo $\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$, siamo condotti al problema di trovare un $\tilde{W}' \leq \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = \tilde{W} \oplus \tilde{W}'$, con

$$\tilde{W} = \langle (-1,-1,1,0), (3,-3,-3,2), (1,-1,1,2), (1,-1,-2,0) \rangle$$

troviamo una base di $\tilde{W}$ operando sui generatori con operazioni elementari

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -3 & 2 \end{matrix} \quad \xrightarrow[\mathrm{IV}+3\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}}} \quad \begin{matrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{matrix} \quad \xrightarrow[\mathrm{IV}-3\mathrm{II}]{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \quad \begin{matrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV}-\mathrm{III}} \quad \begin{matrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Si ha che $\{(1,1,-1,0), (0,2,1,0), (0,0,3,2)\}$ è una base di $\tilde{W}$ che si può completare alla seguente base di $\mathbb{R}^4$

$$\{(1,1,-1,0), (0,2,1,0), (0,0,3,2), (0,0,0,1)\}$$

Quindi una possibile scelta di $\tilde{W}'$ è

$\tilde{W}' = \langle (0,0,0,1) \rangle$. Tramite l'isomorfismo fissato il sottospazio $\tilde{W}'$ corrisponde al sottospazio

$$W' = \langle 1 \rangle \text{ di } \mathbb{R}^{\leq 3}[x].$$

Si ha $\mathbb{R}^{\leq 3}[x] = W \oplus W'$.