Foglio di esercizi 5

Esercizio 1:

(a) $\phi(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2) =$

$$= (x_1+x_2 + y_1+y_2 + 2(z_1+z_2),\ y_1+y_2-(z_1+z_2)+w_1+w_2,\ 2(x_1+x_2)+$$

$$+\ y_1+y_2-(w_1+w_2)) =$$

$$= (x_1 \text{[redacted]} + y_1 + 2z_1,\ y_1 - z_1 + w_1,\ 2x_1 + y_1 - w_1) +$$

$$(x_2 + y_2 + 2z_2,\ y_2 - z_2 + w_2,\ 2x_2 + y_2 - w_2) =$$

$$= \phi(x_1, y_1, z_1, w_1) + \phi(x_2, y_2, w_2, z_2).$$

$$\phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda w) = (\lambda x + \lambda y + 2\lambda z,\ \lambda y - \lambda z + \lambda w,\ 2\lambda x + \lambda y - \lambda w)$$

$$= \lambda(x+y+2z,\ y-z+w,\ 2x+y-w)$$

$$= \lambda\phi(x,y,z,w)$$

Dunque ϕ è lineare.

(b) La matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è

$$A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\ker\phi$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema di equazioni corrispondente alla matrice suscritta, riduciamo la matrice a scala per risolvere il sistema e trovare $\ker\phi$.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{\boxed{III}-2\boxed{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{\boxed{III}+\boxed{II}} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{matrix}$$

la matrice ha rango 3, dunque $A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\phi}$ ha rango 3, dunque ϕ è suriettiva, ed una base di $\operatorname{Im}\phi$ è ad esempio $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \mathcal{E}_3$.

Il sottospazio $\ker\phi$ è definito dal sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - z + w = 0 \\ -5z = 0 \end{cases}$$

le variabili libere sono w

per $w = 1$ si ottiene $(1,-1,0,1)$

dunque $\{(1,-1,0,1)\}$ è una base di $\ker\phi$.

(c) Sia $\mathcal{V} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0)\}$

e $\mathcal{W} = \{(1,2,1),(-1,1,1),(0,0,1)\}$, si ha

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi} = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{W},id_{\mathbb{R}^3}} \, A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\phi} \, A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,id_{\mathbb{R}^4}}$$

$$= \left(A_{\mathcal{W},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}}\right)^{-1} A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\phi} \, A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,id_{\mathbb{R}^4}}$$

Si ha

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,id_{\mathbb{R}^4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A_{\mathcal{W},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcola l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con l'ausilio del determinante e si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$A_{v,w,\phi} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -4 & -1 \\ 9 & -2 & -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) W è tale che $\dim(\phi(W)) = \dim(W)$ se e solo se $W \cap \ker\phi = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, uno massimale con questa proprietà è tale che $\mathbb{R}^4 = \ker\phi \oplus W$.

Completiamo la base $\{(1,-1,0,1)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$, ad esempio $\{(1,-1,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$.

Possiamo quindi prendere $W = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$ e si avrà $\mathbb{R}^4 = W \oplus \ker\phi$.

Esercizio 2: (a) Cerchiamo un sottoinsieme massimale di vettori lin. ind. dell'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0$ i vettori $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (-1,1,1)$, $v_4 = (0,1,-1)$ sono lin. ind., dunque formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Esiste quindi un'unica applicazione lineare $\tilde{\Phi}_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\tilde{\Phi}_k(v_1) = (1,0,k,0)$, $\tilde{\Phi}_k(v_2) = (1,1,0,0)$, $\tilde{\Phi}_k(v_4) = (2,k+1,0,0)$.

Calcoliamo il valore di $\tilde{\Phi}_k$ su $v_3 = (3,0,-1)$.

Troviamo le coordinate di v_3 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_4\}$.

Risolviamo il sistema che deriva dall'equazione $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4$: la matrice completa di tale sistema è

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{matrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{III}} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 3 \\ \beta + 2\gamma = -2 \\ 5\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

dunque $v_3 = v_1 - 2v_2$, segue che

$$\tilde{\phi}_k(v_3) = \tilde{\phi}_k(v_1) - 2\,\tilde{\phi}_k(v_2) = (1,0,k,0) - 2\,(1,1,0,0) = (-1,-2,k,0)$$

Affinché la ϕ richiesta esista è necessario e sufficiente che

$$\tilde{\phi}_k(v_3) = \phi(v_3) \quad \text{dunque}$$

$$(-1,-2,k,0) = (-1,k-3,2-k,1-k)$$

ossia se e solo se $k=1$.

(iv) Se $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_4\}$ si ha

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre si ha

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_4,\phi} = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,\phi}\, A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{V},id_{\mathbb{R}^3}} = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,\phi}\, A^{-1}_{\mathcal{V},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}}$$

Calcoliamo l'inversa di $A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_3,id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_4,\phi} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ -5 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Si ha $\operatorname{rk}\phi = \operatorname{rk} A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,\phi} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$.

Poiché le ultime due colonne sono proporzionali mentre la prima e la seconda non lo sono.

Esercizio 3:

I vettori $(1,-1,1,-1), (1,0,-1,0), (0,0,1,1)$ sono lin. ind.
Troviamo $U \cap V$.

$$\alpha(1,-1,1,-1) + \beta(1,0,-1,0) + \gamma(0,0,1,1) \quad \Bigg| \quad \begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 2x+3y-z+w=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{\alpha}+\cancel{\alpha}-\cancel{\beta}+\gamma-\cancel{\alpha}+\gamma=0 \\ 2\alpha+2\beta-3\alpha-\alpha+\beta-\gamma-\alpha+\gamma=0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2\gamma=0 \\ -3\alpha+3\beta=0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \alpha=\beta \\ \gamma=0 \end{cases}$$

ossia

$$U \cap V = \langle (1,-1,1,-1)+(1,0,-1,0) \rangle = \langle (2,-1,0,-1) \rangle$$

$\dim U\cap V = 1$ mentre $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$
dunque $\dim(U+V) = \mathbb{R}^4$.

Segue che, poiché $(2,-2,-1,1) \in U$ ma $(2,-2,-1,1) \notin U \cap V$, si ha che

$\{(1,-1,1,-1), (1,0,-1,0), (0,0,1,1), (2,-2,-1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$

Si deduce che esiste una ed una sola applicazione lineare $\tilde{\phi}_k : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$\tilde{\phi}_k(1,-1,1,-1) = (2,1)$$

$$\tilde{\phi}_k(1,0,-1,0) = (-2,-k)$$

$$\tilde{\phi}_k(0,0,1,1) = (1,k)$$

$$\tilde{\phi}_k(2,-2,-1,1) = (0,0)$$

Vediamo per quali k $\tilde{\phi}_k(2,-1,0,-1) = (0,0)$

Si ha

$$\tilde{\phi}_k(2,-1,0,-1) = \tilde{\phi}_k\big((1,-1,1,-1)+(1,0,-1,0)\big) =$$

$$= \tilde{\phi}_k(1,-1,1,-1) + \tilde{\phi}_k(1,0,-1,0) = (2,1)+(-2,-k) = (0,1-k)$$

Dunque $\tilde{\phi}_k(2,-1,0,-1) = (0,0)$ se e solo se $k=1$.

Poiché $\tilde{\phi}_1(1,-1,1,-1) = (2,1)$ e $\tilde{\phi}_1(0,0,1,1) = (1,1)$ sono lin. ind., segue che $\mathrm{Im}\,\tilde{\phi}_1 = \mathbb{R}^2$, dunque $\dim(\ker\tilde{\phi}_1) = 2$.

Ma $\tilde{\phi}_1(2,-2,-1,1) = \tilde{\phi}_1(2,-1,0,-1) = (0,0)$ e poiché $\{(2,-2,-1,1),(2,-1,0,-1)\}$ è una base di U, quindi $\ker\tilde{\phi}_1 \supset U$ e poiché hanno stessa dimensione segue che $\ker\tilde{\phi}_1 = U$. Dunque esiste una ed una sola ϕ con le proprietà richieste ed è $\tilde{\phi}_1$.

(b) Si ha

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_2,\phi} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{V} = \{(1,-1,1,-1), (1,0,-1,0), (0,0,1,1), (2,-2,-1,1)\}$,

inoltre

$$A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_2,\phi} = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_2,\phi}\, A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{V},\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}} = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_2,\phi} \left(A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}}\right)^{-1}$$

Calcoliamo l'inversa di $A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Usando l'eliminazione di Gauss

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{IV}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}+\mathrm{I}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[\frac{1}{2}\mathrm{III}]{\mathrm{IV}-\mathrm{II}} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{I}-\mathrm{II}]{\mathrm{IV}-\mathrm{III}} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1/2 & -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{3}\mathrm{IV}} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{array}$$

$$\xrightarrow{I-2IV} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/6 & -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{matrix}$$

Dunque $A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_4, id_{\mathbb{R}^4}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/6 & -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

Da cui

$$A = A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_2,\phi} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/6 & -1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/3 & -3/2 & 7/6 & -1/6 \\ -1/6 & -1/2 & 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathrm{rk}\, A = \dim(\mathrm{Im}\,\phi) = 2$

(d) Si ha $(1,2) = -(2,1) + 3(1,1)$

Dunque $\phi(-(1,-1,1,-1) + 3(0,0,1,1)) = -(2,1) + 3(1,1) = 1,2$

Segue che

$$\phi^{-1}\{(1,2)\} = (-1,1,2,4) + \ker\phi = (-1,1,2,4) + \mathcal{V}$$

$$= (-1,1,2,4) + \langle (2,-2,-1,1), (2,-1,0,-1) \rangle$$

Esercizio 4: Verifichiamo che U e V siano in somma diretta.

$$(\alpha,\alpha,\beta,\beta) \;\Big|\; \begin{matrix} x+2y-z-2w=0 \\ x+y+z+w=0 \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha-3\beta=0 \\ 2\alpha+2\beta=0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=0$$

(a) dunque $U\cap V=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$ e $\mathbb{R}^4=U\oplus V$.

Troviamo una decomposizione dei vettori della base canonica in somma di un vettore in U e uno in V.

$$(1,0,0,0)-(\alpha,\alpha,\beta,\beta)\in U \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\alpha-3\beta=-1 \\ 2\alpha+2\beta=-1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ma $$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

dunque $$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5/12 \\ -1/12 \end{pmatrix}$$

cioè $(1,0,0,0)-\left(-5/12,-5/12,-1/12,-1/12\right)\in U$

ossia $\pi(1,0,0,0)=\left(-5/12,-5/12,-1/12,-1/12\right)$

$$(0,1,0,0)-(\alpha,\alpha,\beta,\beta)\in U \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7/12 \\ 1/12 \end{pmatrix}$$

cioè $(0,1,0,0) - \left(-\frac{7}{12}, -\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right) \in U$

ossia $\pi(0,1,0,0) = \left(-\frac{7}{12}, -\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$

$(0,0,1,0) - (\alpha, \alpha, \beta, \beta) \in U \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

cioè $(0,0,1,0) - \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{5}{12}, -\frac{5}{12}\right) \in U$

ossia $\pi(0,0,1,0) = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}, -\frac{5}{12}, -\frac{5}{12}\right)$

$(0,0,0,1) - (\alpha, \alpha, \beta, \beta) \in U \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ -\frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

cioè $(0,0,0,1) - \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{7}{12}\right) \in U$

ossia $\pi(0,0,0,1) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{7}{12}\right)$

Si conclude che

$$A_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_4, \pi} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

(γ) Si ha $\sigma = id_{\mathbb{R}^4} - 2\pi$, dunque

$$A_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_4, \sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \\ \end{pmatrix} =$$

$$A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4,\sigma} = \begin{pmatrix} 11/6 & 7/6 & 1/6 & -1/6 \\ 5/6 & 13/6 & 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 & 11/6 & 7/6 \\ 1/6 & -1/6 & 5/6 & 13/6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5:

(a)

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 1 & 2-k & 1 \\ -1 & -k & -3 \\ k & 1 & k+1 \end{pmatrix} = -k^2 - k + 3 + (k-2)(3k-k-1) - 1 + k^2$$

$$= \cancel{-2k^2} - k + 2 + 2k^2 - k - 4k + 2 = 2k^2 - 6k + 4 = 0$$

$$\iff k^2 - 3k + 2 = 0 \iff (k-1)(k-2) = 0$$

$$\iff k = 1, 2$$

A_k ha rango 3 per $k \neq 1, 2$

(b) $k = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\ker A_1$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dal sistema la cui matrice dei coefficienti è A_1, risolvendo il sistema si trova $\ker A_1 = \langle (1,-1,0) \rangle$, inoltre si ha $\operatorname{Im} A_1 = \langle (1,-1,1), (1,-3,2) \rangle$.

$k=2$

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema la cui matrice dei coefficienti è A_2 si ottiene

$$\ker A_2 = \langle (1,1,-1) \rangle, \text{ inoltre } \operatorname{Im} A_2 = \langle (1,-1,2),(0,-2,1) \rangle.$$

(c)

$$A_0=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ è invertibile dunque $A_0^{-1}\{(1,0,0)\}$ è

un singolo vettore, soluzione del sistema di matrice la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

risolviamo il sistema riducendolo a scala tramite operazioni elementari

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{I+II} \begin{matrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{I-2III} \begin{matrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \quad +3z = 0 \\ \quad y + z = 0 \\ \qquad 4z = -1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{matrix} x = 3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

Quindi $A_0^{-1}\{(1,0,0)\} = (3/4, 1/4, -1/4)$

(d) $k=1$

$A_1^{-1}\{(2,-4,5)\}$ è definito dal sistema di matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Riduciamo il sistema in forma a scala usando le operazioni elementari

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{matrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\mathrm{II}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

la matrice ridotta in forma a scala ha un pivot nell'ultima colonna, dunque il sistema non ha soluzioni:

$$A_1^{-1}\{(2,-4,5)\} = \emptyset$$

$k=2$

$A_2^{-1}\{(2,-4,5)\}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema avente matrice completa

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{matrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-2\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

dunque il sistema è equivalente al seguente

$$x \quad + z = 2$$
$$y + z = 1$$

per $z = 0$ si ottiene $(2,1,0)$

dunque $A_2^{-1}\{(2,-4,5)\} = (2,1,0) + \langle (1,1,-1) \rangle$.

Esercizio 6:

(a) È noto che $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ e $\frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \lambda \frac{d}{dx} f(x)$

ossia l'applicazione $f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$ è lineare.

(b) È noto che una funzione con derivata prima nulla è costante (la funzione è supposta continua e derivabile)

dunque $\ker \phi = \langle 1 \rangle$

Inoltre $\phi(x^4) = 4x^3$, $\phi(x^3) = 3x^2$, $\phi(x^2) = 2x$, $\phi(x) = 1$ e $\phi(1) = 0$

dunque $\operatorname{Im} \phi = \langle 4x^3, 3x^2, 2x, 1, 0 \rangle = \langle x^3, x^2, x, 1 \rangle$.

$\{x^3, x^2, x, 1\}$ è una base di $\operatorname{Im} \phi$.

(c) dalla discussione del punto (b) si può concludere

$$A_{v,v,\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $v = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

Esercizio 7:

(a) Le coordinate di $\phi(A)$ rispetto alla base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sono espressioni lineari omogenee di A rispetto alla stessa base, dunque ϕ è lineare.

(b) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in \ker\phi \iff \begin{array}{l} a_{11}+a_{12}=0 \\ a_{21}+a_{22}=0 \\ a_{31}+a_{32}=0 \end{array}$

ossia $a_{12}=-a_{11}$, $a_{22}=-a_{21}$, $a_{32}=-a_{31}$

Quindi

$$\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\ker\phi$.

Inoltre $\phi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

dunque $\mathrm{Im}\,\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{Im}\,\phi$.

(c) Un tale sottospazio W deve avere dimensione 3 e deve avere intersezione banale con $\ker\phi$.
Ossia si deve avere $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) = \ker\phi \oplus W$.

Un esempio di un tale W è $\operatorname{Im}\phi$ (infatti si vede che $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) = \ker\phi \oplus \operatorname{Im}\phi$, $\operatorname{Im}\phi$ non è l'unica scelta possibile tuttavia).

(d) Sia v la base in questione, allora

$$A_{v,v,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$