Foglio di esercizi 6:

Esercizio 1:

(a) La matrice completa del sistema per $k=0$ è

$$(A_0|b_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

riducendo il sistema a scala tramite operazioni elementari si ottiene

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[III-I]{II+I} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{II+2III}$$

$$\longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

$\mathrm{rk}\, A_0 = 2 \neq \mathrm{rk}(A_0|b_0) = 3$ dunque il sistema non ha soluzioni.

(b)

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} = 1 + k - k + k(k-1) - 1 =$$

$$= k(k-1)$$ dunque $\det A_k = 0 \iff k = 0, 1$

per $k=0$ il sistema non ammette soluzioni.

Studiamo il caso $k=1$.

$$(A_1|b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ y-z=1 \end{cases}$$ la variabile libera è z

per $z=0$ si ottiene la soluzione particolare $(1,1,0)$

per $z=1$ si ottiene la seguente soluzione dell'omogenea associata $(-2,1,1)$

dunque l'insieme delle soluzioni del sistema per $k=1$ è

$$(1,1,0) + \langle (-2,1,1) \rangle .$$

(c) Riduciamo a scala il sistema di matrice completa $(A_k|b_k)$:
$(k \neq 0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2k \\ k-1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-(k-1)\mathrm{I}}$$ [redacted]

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 0 & 2-k & -k & 1-2k(k-1) \\ 0 & k-1 & 0 & -k+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{k-1}\,\boxed{III}} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 0 & 2-k & -k & -2k^2+2k+1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\boxed{II}+(\cancel{k}-2)\,\boxed{III}} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & -k & -2k^2+k+3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+y+z = 2k \\ y = -1 \\ -kz = -2k^2+k+3 \end{cases}$$

da cui (per $k \neq 0,1$)

$$x = \frac{2k+3}{k}$$
$$y = -1$$
$$z = \frac{2k^2-k-3}{k}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1-6+2 = -3$$

Esercizio 2:

(a) Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(2,0,-1) = (0,0,0)$$

$$f(0,1,0) = (2,0,-1)$$

$$f(0,0,1) = (2,1,2)$$

Allora si ha $\ker f = \langle (2,0,-1) \rangle$ e $\operatorname{Im} f = \langle (2,0,-1), (2,1,2) \rangle$ come richiesto.

Di possibili f con le proprietà richieste ce ne sono infinite.

(b) Si ha $(1,0,0) = \frac{1}{2}\left((2,0,-1) + (0,0,1) \right)$

dunque $f(1,0,0) = \frac{1}{2}\left(f(2,0,-1) + f(0,0,1) \right) = (1, 1/2, 1)$

Segue che

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Si ha $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$ dunque $(1,1,1) \notin \langle (2,0,-1), (2,1,2) \rangle$

se ne deduce che $f^{-1}\{(1,1,1)\} = \emptyset$.

Si ha $(0,-1,-3) = (2,0,-1) - (2,1,2)$, se ne deduce che

$$f^{-1}\{(0,-1,-3)\} = (0,1,-1) + \ker f = (0,1,-1) + \langle (2,0,-1) \rangle.$$

Esercizio 3:

(a) $f_a(1,0,0) = (a,1,0)$, $f_a(0,1,0) = (0,1,0)$, $f_a(0,0,1) = (0,a,1)$

dunque

$$A_a = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f_a} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\det A_a = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a$$

Dunque f_a non è iniettivo per $a = 0$.

$$\ker f_0 = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, \begin{matrix} x+y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

Per $a \neq 0$ f_a è iniettivo e $\ker f_a = \{(0,0,0)\}$.

(c)

$$A_0 = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\mathcal{V} = \{ (1,1,0), (-2,-1,0), (1,0,-1) \}$

poiché $A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $A_{\mathcal{E},\mathcal{V},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

infatti $(1,0,0) = -(1,1,0) - (-2,-1,0)$

$(0,1,0) = 2(1,1,0) + (-2,-1,0)$

$(0,0,1) = (1,1,0) + (-2,-1,0) - (1,0,-1)$

Da

$$A_{v,v,g_0} = A_{\varepsilon,v,id_{\mathbb{R}^3}} \, A_{\varepsilon,\varepsilon,g_0} \, A_{v,\varepsilon,id_{\mathbb{R}^3}}$$

si deduce

$$A_{v,v,g_0} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio 4</u>:

(a) riduciamo a scala la matrice A_h:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 1 & 3 & 2 & -h \end{matrix} \xrightarrow{\overline{III}-\overline{I}} \begin{matrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 0 & 1 & 2-h & 1-h \end{matrix}$$

per $h \neq 1$

$$\xrightarrow{\frac{1}{h-1}\overline{II}} \begin{matrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2-h & 1-h \end{matrix} \xrightarrow{\overline{III}-\overline{II}} \begin{matrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-h & 2-h \end{matrix}$$

Dunque, per $h \neq 1,2$

$\dim \operatorname{Im} \varphi_h = \operatorname{rk} A_h = 3$

di conseguenza $\dim \ker \varphi_h = 1$

per $h = 1,2$

$\dim \operatorname{Im} \varphi_h = \operatorname{rk} A_h = 2$

di conseguenza $\dim \ker \varphi_h = 2$

(b)

per $h \neq 1,2$

la matrice ridotta a scala è

$$\begin{matrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} x+2y+hz-w=0 \\ y-w=0 \\ z+w=0 \end{cases}$$

per $w=1$ si ottiene $(h-1,1,-1,1)$

dunque $\ker \varphi_h = \langle (h-1,1,-1,1) \rangle$ e $\operatorname{Im} \varphi_h = \mathbb{R}^3$.

per $h=1$ la matrice ridotta a scala è

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} x+2y+z-w=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

per $(z,w)=(1,0)$ si ottiene $(1,-1,1,0)$

per $(z,w)=(0,1)$ si ottiene $(1,0,0,1)$

dunque $\ker \varphi_1 = \langle (1,-1,1,0), (1,0,0,1) \rangle$

L'immagine di φ_1 è generata dalle colonne di A_1, dunque

$\operatorname{Im} \varphi_1 = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$.

per $h = 2$ la matrice ridotta a scala è

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \text{da cui il sistema} \qquad \begin{cases} x + 2y + 2z - w = 0 \\ y - w = 0 \end{cases}$$

per $(z,w) = (1,0)$ si ottiene $(-2,0,1,0)$

per $(z,w) = (0,1)$ si ottiene $(-1,1,0,1)$

dunque $\ker \varphi_2 = \langle (-2,0,1,0), (-1,1,0,1) \rangle$

e $\operatorname{Im} \varphi_2 = \langle (1,0,1), (2,1,3) \rangle$

(c) per $h = 1$ $\quad (1,1,3) \notin \operatorname{Im} \varphi_1 = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$

dunque $\varphi_1^{-1} \{(1,1,3)\} = \emptyset$.

per $h = 2$ $\quad (1,2,3) = -2(1,0,1) + 2(2,1,3)$

dunque $\varphi_2^{-1} \{(1,2,3)\} = (-2,2,0,0) + \langle (-2,0,1,0), (-1,1,0,1) \rangle$

per $h \neq 1,2$ si ha

$$(1,h,3) = \frac{-1}{h-1}(1,0,1) + \frac{h}{h-1}(2,h-1,3) - \frac{1}{h-1}(h,0,2)$$

Dunque $\varphi_h^{-1} \{(1,h,3)\} = \left(\frac{-1}{h-1}, \frac{h}{h-1}, \frac{-1}{h-1}, 0 \right) + \langle (h-1,1,-1,1) \rangle$.

Esercizio 5:

(a)

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} k-3 & k & k^2-1 \\ 2 & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k^2-5k+6-2k$$

$$= k^2-7k+6 = (k-1)(k-6)$$

dunque A_k è iniettiva se e solo se $k \neq 1,6$

(b) A_k è suriettiva $\Leftrightarrow$ A_k è iniettiva $\Leftrightarrow$ $k \neq 1,6$

(c) per $k \neq 1,6$ $\operatorname{Im} A_k = \mathbb{R}^3$ dunque $A_k^{-1}\{(1,-1,1)\} \neq \emptyset$

per $k=1$, $\operatorname{Im} A_1 = \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$

Si ha $(1,-1,1) = (1,-1,0) + (0,0,1) \in \langle (1,-1,0), (0,0,1) \rangle = \operatorname{Im} A_1$

dunque $A_1^{-1}\{(1,-1,1)\} \neq \emptyset$

per $k=6$, $\operatorname{Im} A_6 = \langle (3,2,0), (35,5,1) \rangle$

ma $(1,-1,1) \notin \langle (3,2,0), (35,5,1) \rangle = \operatorname{Im} A_6$

dunque $A_6^{-1}\{(1,-1,1)\} = \emptyset$.

Si conclude che $A_6^{-1}\{(1,-1,1)\}$ è nonvuoto se e solo se $k \neq 6$.

(d) $A_k^{-1}\{(1,-1,1)\}$ è infinita solo nel caso $k=1$.

Determiniamo tale controimmagine.

$$\ker A_1 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,2,0) \rangle$$

Poiché $(1,-1,1) = (1,-1,0) + (0,0,1)$ si ha

$$A_1^{-1}\{(1,-1,1)\} = (0,1,1) + \langle (1,2,0) \rangle .$$

(e) Si vuole una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$A_{v,\mathcal{E},f_k} = \begin{pmatrix} 2k-3 & k & k^2-1 \\ k & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque si deve avere

$$f_k(v_1) = (2k-3, k, 0)$$

$$f_k(v_2) = (k, k-2, 0)$$

$$f_k(v_3) = (k^2-1, k-1, 1)$$

Si può prendere $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$.