Foglio di esercizi 7:

Esercizio 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 21 \\ -5 & 4 & -17 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2:

$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ dunque $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile

e $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

quindi

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 2 - \cancel{3}1 = -1 \neq 0$$

dunque A è invertibile.

Usando il determinante per costruire l'inversa di A si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} S^t = -S^t$$

con $S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

dunque

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4:

Poiché A è invertibile il sistema ammette un'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5:

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ 1+k & -k & 1 \end{pmatrix} = -1 + k^2 - 2k + 1 + k = k^2 - k$$

dunque A_k è invertibile per $k \neq 0,1$

Calcoliamo l'inversa A_k^{-1} di A_k per $k \neq 0,1$.

$$A_k^{-1} = \frac{1}{\det A_k} S_k^t$$

con
$$S_k = \begin{pmatrix} k^2-1 & -2+k+k^2 & 1-k \\ -k & -k & k \\ 1 & 2-k & -1 \end{pmatrix}$$

dunque per $k \neq 0,1$)

$$A_k^{-1} = \frac{1}{k^2-k}\begin{pmatrix} k^2-1 & -k & 1 \\ k^2+k-2 & -k & 2-k \\ 1-k & k & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6: La matrice dei coefficienti del sistema è A_k
il sistema avrà una ed una sola soluzione se e solo se $\det A_k = 0$, dunque per $k \neq 0,1$.

La soluzione sarà

$$A_k^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2-k}\begin{pmatrix} k^2-1 & -k & 1 \\ k^2+k-2 & -k & 2-k \\ 1-k & k & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{k^2-k}\begin{pmatrix} 2k^2-k \\ 2k^2-k \\ -2k^2+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2k-1}{k-1} \\ \frac{2k-1}{k-1} \\ \frac{-2k+1}{k-1} \end{pmatrix} = \frac{2k-1}{k-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7:

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ -k & 1 & 1+k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1+k-2k-1+k^2 = k^2-k$$

dunque $\det A_k = 0 \iff k = 0,1$

Per $k \neq 0,1$ il sistema ammette una e una sola soluzione

$k=0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dunque } \operatorname{Im} A_0 = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$$

si ha $(1,2,2) \in \operatorname{Im} A_0$ dunque per $k=0$ il

sistema ha infinite soluzioni

$k=1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dunque } \operatorname{Im} A_1 = \langle (1,1,0), (1,1,1) \rangle$$

si ha $(1,2,2) \notin \langle (1,1,0), (1,1,1) \rangle = \operatorname{Im} A_1$

dunque il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 8:

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1+k & 1 & -k \end{pmatrix} = k^2 - 1 - 2k + 1 + k = k^2 - k$$

segue che $\det A_k = 0$ se e solo se $k = 0, 1$

Per $k \neq 0,1$ il sistema ammette una e una sola soluzione

$k = 0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, dunque $\operatorname{Im} A_0 = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$

si ha $(1,2,2) = 2(0,1,1) - (-1,0,0) \in \operatorname{Im} A_0$

dunque per $k=0$ il sistema ammette infinite soluzioni

$$A_0^{-1}\{(1,2,2)\} = (0,2,-1) + \ker A_0 = (0,2,-1) + \langle (1,-1,2) \rangle$$

$k = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$, si verifica che

$(1,2,2) \notin \operatorname{Im} A_1 = \langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle$.

dunque per $k=1$ il sistema non ammette soluzioni.