Foglio di esercizi 9

Esercizio 1:

si ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \frac{-1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2:

(a)

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\phi(x,y,z) = (x+y+z,\ x+y+z,\ y+z)$

(b) Si ha $\ker \phi = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1) \rangle$

e $\phi^{-1}\{(2,2,1)\} = (1,1,0) + \langle (0,1,-1) \rangle$

(c) $P(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^3 + t - 1 =$

$$= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 + t - 1 = -t^3 + 3t^2 - 4t =$$

$$= -t\ (t^2 - 3t + 4)$$

Poiché 0 è l'unico autovalore reale di ϕ, con molt. alg. 1

ϕ non è diagonalizzabile.

Esercizio 3:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ A è simmetrica quindi diagonalizzabile

- $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -3 \\ 3 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 1 + 9 = t^2 - 2t + 10$$

il polinomio caratteristico non ha radici reali dunque B non è diagonalizzabile

- $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$P(t) = (t-3)^2$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,0) \rangle$$

$\dim V_3 = 1 < \text{molt. alg. } 3 = 2$

dunque C non è diagonalizzabile

- D è diagonale dunque diagonalizzabile

- $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 5 \\ 0 & -t & 3 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = -(1-t)^2 t$$

dunque 1 è autovalore di molt. alg. 2

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$\dim V_1 = 1 < 2 = $ molt. alg. 1

dunque E non è diagonalizzabile

- $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 4 \\ 0 & -t & -2 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = -t(1-t)^2$$

autovalori: 0 di molt. alg. 1; 1 di molt. alg. 2

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,2,-1) \rangle$$

$\dim V_1 = 2 = $ molt. alg. di 1

Poiché il polinomio caratteristico di F ha tutte radici reali e le molt. alg. degli autovalori sono uguali alle molt. geom. degli autovalori, F è diagonalizzabile.

- $$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 1 \\ -1 & 1-t & -1 \\ 1 & -1 & 1-t \end{pmatrix} = -t^2 (t-3)$$

autovalori
- 0 di molt. alg. 2
- 3 di molt. alg. 1

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$$

$$V_3 = \ker \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,1) \rangle$$

Poiché gli autovalori di G sono tutti reali e le molteplicità algebriche degli autovalori sono uguali alle molteplicità geometriche degli stessi, la matrice G è diagonalizzabile.

Esercizio 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ker A = \langle (1,-1,0), (0,1,-1) \rangle$

inoltre $(1,1,1)$ è autovettore di A relativo all'autovalore 3, dunque

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

con $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

o anche

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ci sono infinite possibili scelte di P, una per ogni base di autovettori di A)

Esercizio 5:

(a)

$$A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\ker F = \ker A = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,-1) \rangle$

$\dim \ker F = 1$

(c) F non è invertibile poiché $\ker F \neq \{(0,0,0)\}$

(d) $P(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = -t(t-2)^2$

gli autovalori di F sono
- 0 con molt. alg. 1
- 2 con molt. alg. 2

(e) $V_0 = \ker F = \langle (1,0,-1) \rangle$

$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$

(f) F è diagonalizzabile

$\mathcal{V} = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,-1)\}$ è una base di autovettori di F

e $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6:

$$P(t) = \det(A_k - tI_3) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2k-4 & -1 \\ k-2 & -t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

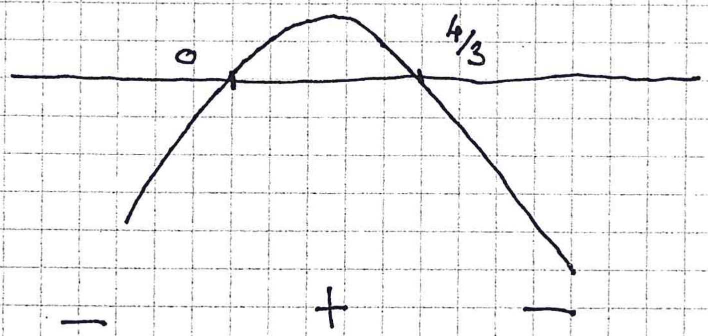
$$= t + (1-t)\left(t^2 - t - 2(k-2)^2\right) =$$

$$= -\left(t^3 - 2t^2 - 2(k-2)^2\right)$$

Studiamo la funzione $y = P(x)$, con
$P(x) = -\left(x^3 - 2x^2 - 2(k-2)^2\right)$

studio della derivata prima:

$$P'(x) = -\left(3x^2 - 4x\right) = -x\,(3x-4)$$

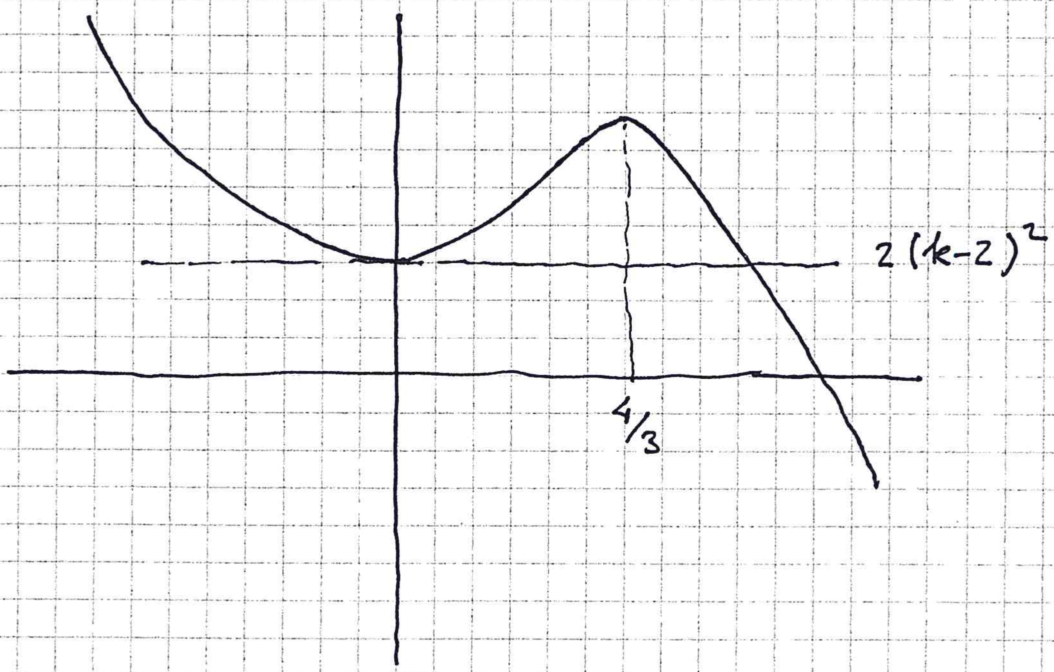


la funzione $y = P(x)$ è decrescente da $-\infty$ a 0, crescente da 0 a $4/3$ e decrescente da $4/3$ a $+\infty$

$P(0) = 2(k-2)^2 \geq 0$ e $P(4/3) = -\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right) - 2(k-2)^2\right) =$

$$= \frac{32}{27} + 2(k-2)^2 > 0$$

Dunque il grafico di $y = P(x)$ è della forma



(a) $A_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ k-2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$(1,0,-1)$ è autovalore di A_k se e solo se $k = 2$,
l'autovalore relativo $(1,0,-1)$ di A_2 è 2.

$$V_2 = \ker\left(A_2 - 2I_3\right) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,-1) \rangle$$

(b) Poiché $P(t) = -\left(t^3 - 2t^2 - 2(k-2)^2\right)$
0 è una radice di $P(t)$ se e solo se $k = 2$

(c) Dal grafico di $y = P(x)$ si deduce che il polinomio $P(t)$ ha una sola radice reale se $k \neq 2$, mentre per $k = 2$ ha 0 come radice di molteplicità 2 e 2 [redacted] come radice di molt. 1.

dunque per $k \neq 2$, A_k non è diagonalizzabile

$k = 2$

$V_2 = \ker(A_2 - 2I_3) = \langle (1,0,-1) \rangle$

$V_0 = \ker A_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$

dunque A_2 è diagonalizzabile e si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) gli autovettori di A_2 tali che appartengano a $W: y = 0$

sono del tipo $(\alpha, 0, \alpha)$ o $(\alpha, 0, -\alpha)$

con $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.