Foglio di esercizi 11:

Esercizio 1:

(a) Risolviamo il sistema che definisce r riducendolo in forma a scala

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{II-3I} \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -4 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad y - 2z = -2 \end{cases}$$ la variabile libera è z

per $z = 0$ otteniamo la soluzione particolare $(0,-2,0)$

per $z = 1$ otteniamo la soluzione particolare dell'omogenea associata [redacted] $(1,2,1)$

dunque una forma parametrica della retta r è

[redacted]

$$r = (0,-2,0) + \langle (1,2,1) \rangle$$

(b) Eliminiamo il parametro α dalla forma parametrica

$$s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 2 \end{cases}$$

sottraendo la y alla x si ottiene $x - y = 2$

Dunque una forma cartesiana di s è

$$s: \begin{cases} x - y = 2 \\ z \quad = 2 \end{cases}$$

(c) Si ha

$$r = (0,2,0) + \langle (1,2,1) \rangle \quad e \quad s = (1,-1,2) + \langle (1,1,0) \rangle$$

Poiché $(1,2,1)$ e $(1,1,0)$ non sono lin. dip. segue che le rette r e s non sono parallele.

Vediamo se sono incidenti o sghembe.

Si ha $(0,2,0) - (1,-1,2) = (-1,3,-2)$ e

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 7 - 1 = 6 \neq 0$$

dunque r e s sono sghembe.

(d) Si ha che il piano π parallelo a r e s e passante per $(1,1,1)$ ha forma parametrica

$$\pi = (1,1,1) + \langle (1,2,1), (1,1,0) \rangle$$

Se vogliamo trovare un'equazione cartesiana di π calcoliamo il prodotto vettoriale $(1,2,1) \times (1,1,0) = (-1,+1,-1)$
dunque $\pi: \; x - y + z - d = 0$ imponendo il passaggio per $(1,1,1)$ si ottiene $\pi: \; x - y + z - 1 = 0$

Esercizio 2:

(a) Troviamo una forma cartesiana di π_2.

Si ha $(1,0,1) \times (0,1,0) = (-1,0,1)$, dunque

$\pi_2 : x - z - d = 0$, imponendo il passaggio per $(1,1,1)$

si ottiene $\pi_2 : x - z = 0$

Per determinare la posizione reciproca di π_1 e π_2 studiamo il sistema che definisce $\pi_1 \cap \pi_2$.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 2

dunque i piani π_1 e π_2 sono incidenti, si intersecano lungo la retta

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema che definisce r si ottiene

$r = (1,0,1) + \langle (1,2,1) \rangle$.

(b) una retta s parallela a π_1 e π_2 e complanare con la retta $(1,-1,2) + \langle (1,1,0) \rangle$ sarà incidente con tale retta. Supponiamo il punto d'intersezione sia $(1,-1,2)$, si ottiene la forma parametrica

$$s = (1,-1,2) + \langle (1,2,1) \rangle \quad \left(\begin{array}{l} s \text{ deve essere} \\ \text{parallela a } r \end{array} \right)$$

(c) Il piano π contenente $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e parallelo alla retta $(1,-1,2) + \langle (1,1,0) \rangle$ avrà forma parametrica

$$\pi = (1,0,1) + \langle (1,2,1), (1,1,0) \rangle$$

Per trovare un'equazione cartesiana di π calcoliamo il prodotto vettoriale $(1,2,1) \times (1,1,0) = (-1,1,-1)$

dunque si avrà $\pi : x - y + z - d = 0$,
imponendo il passaggio per $(1,0,1)$ si ottiene

$$\pi : x - y + z - 2 = 0 .$$

Esercizio 3:

(a) Studiamo l'intersezione tra s e π.

La retta s ha forma parametrica

$$s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1+\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$$

Imponendo che il punto $(2,-1+\alpha,1+\alpha)$ appartenga al piano π si ottiene

$$2-(-1+\alpha)+(1+\alpha) = -1$$

cioè $4=-1$. Ciò vuol dire che non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il punto $(2,-1+\alpha,1+\alpha)$ appartenga a π, ossia $s \cap \pi = \emptyset$; s e π sono quindi paralleli e la retta s non giace nel piano π.

(b) Il piano π' passante per $(1,0,-1)$ e contenente la retta s avrà forma parametrica

$$\pi' = (1,0,-1) + \langle (2,-1,1)-(1,0,-1), (1,1,0) \rangle$$

cioè

$$\pi' = (1,0,-1) + \langle (1,-1,2), (1,1,0) \rangle$$

Per determinare l'equazione di π' calcoliamo il prodotto vettoriale $(1,-1,2) \times (1,1,0) = (-2,2,2)$

dunque π': $x-y-z-d=0$; imponendo il passaggio per $(1,0,-1)$ si ottiene π': $x-y-z-2=0$.

(c) La giacitura di un piano π'' incidente con π in una retta parallela a s sarà del tipo $\langle (0,1,1), v \rangle$

dove v è un vettore linearmente indipendente con $(0,1,1)$ e tale che

$$\langle (0,1,1), v \rangle \neq \text{giacitura di } \pi$$

dunque è sufficiente che v non soddisfi all'equazione $x - y + z = 0$ della giacitura di π.

Possiamo ad esempio scegliere $v = (1,0,0)$.

Segue che

$$\pi'' = (0,0,0) + \langle (0,1,1), (1,0,0) \rangle$$

soddisfa alle richieste. (Si poteva scegliere qualsiasi punto base di π'')

Esercizio 4:

(a) Una forma parametrica della retta passante per P_1 e P_2

è $\quad r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle$

cioè $\quad r = (2,0,2) + \langle (-1,-1,0) \rangle$.

Per trovare una forma cartesiana di r eliminiamo il parametro α dalla forma parametrica

$$r : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \quad -\alpha \\ z = 2 \end{cases}$$

si ottiene

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ z \quad = 2 \end{cases}$$

(b) Una forma parametrica del piano passante per tre punti non allineati P_2, P_3, P_4 è

$$\pi = P_2 + \langle P_3 - P_2 \, , \, P_4 - P_2 \rangle$$

dunque $\quad \pi = (1,-1,2) + \langle (1,3,0), (0,1,-1) \rangle$

per determinare una forma cartesiana di π calcoliamo $\quad (1,3,0) \times (0,1,-1) = (-3,1,1)$

dunque $\pi : \; 3x - y - z - d = 0$, imponendo per $(1,-1,2)$ si ottiene

$$\pi : 3x - y - z - 2 = 0$$

(c) $s = (2,0,2) + \langle (-1,-1,0) \rangle$

$\pi = (1,-1,2) + \langle (1,3,0), (0,1,-1) \rangle$

Poiché $(1,1,0) \notin \langle (1,3,0), (0,1,-1) \rangle$, la retta s ed il piano π sono incidenti.

Il punto d'intersezione è il punto

$P_2 = (1,-1,2) = s \cap \pi$.