A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

16 settembre 2014

TEORIA

1. Sia $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$. Definire nucleo e immagine di Φ. Cosa si può dire sul rango di Φ^2 se $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \ker(\Phi)$?
2. Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che $V = U \oplus W$. Definire la simmetria σ di asse U e direzione W e dimostrare che $-\sigma$ è ancora una simmetria. Determinare asse e direzione di $-\sigma$.
3. Dare la definizione di matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{A}$ alla base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale V e dimostrare che una matrice di cambiamento di base è sempre invertibile.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)^2 + \frac{7-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(1,-1,0,0) = (1,2,-1), \qquad \phi_h(0,1,-1,0) = (-1,h,-1),$$

$$\phi_h(0,0,1,0) = (h,2,h-2), \qquad \phi_h(0,0,0,1) = (0,h+2,-2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(1,0,-1,-1)$. (2 punti)

(b) Per $h = 1$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo. (2 punti)

(d) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(1,-1,1)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(1,-1,1)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k+3 & 1 \\ 0 & -2(k+1)^2 & -2k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esistono, due valori distinti $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che A_{k_1} sia simile a A_{k_2}. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio $U =< (1,0,2),(1,1,3) >$ ed il vettore $v = (3,-4,2)$.

(a) Determinare una base ortonormale di U. (2 punti)

(b) Determinare una base di $< v >^{\perp}$. (2 punti)

(c) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(v)$ del vettore v sul sottospazio U. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $w \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||w|| = \sqrt{35}$ e $p_U(w) = p_U(v)$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il punto $P = (1,0,1)$, la retta

$$r : \begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

ed il piano $\pi = (0,0,1)+ < (1,1,0),(1,0,-1) >$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π ed una forma parametrica della retta r . (2 punti)

(b) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto P. (2 punti)

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il piano π. (2 punti)

(d) Determinare posizione reciproca e distanza tra la retta r e la retta $s = \pi \cap \pi^{'}$, dove $\pi^{'}$ è il piano contenente la retta r ed il punto P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

16 settembre 2014

TEORIA

1. Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che $V = U \oplus W$. Definire la simmetria σ di asse W e direzione U. Dimostrare inoltre che σ è invertibile e descriverne l'inversa.
2. Definire l'angolo tra due vettori u, v di $\mathbb{R}^3$ ed esibire esplicitamente due vettori u, v di $\mathbb{R}^3$ formanti un angolo di $\pi/3$.
3. Sia $\Phi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$. Definire nucleo e immagine di Φ. È possibile che si abbia $\mathrm{rk}(\Phi) = 4$ nel caso in cui $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \ker(\Phi)$? In caso affermativo fornire un esempio, in caso negativo dare una breve dimostrazione.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i)^2$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(-1, 1, 0, 0) = (1, 2, -1), \qquad \phi_h(0, -1, -1, 0) = (-1, h + 1, -1),$$

$$\phi_h(0, 0, 1, 0) = (h + 1, 2, h - 1), \qquad \phi_h(0, 0, 0, 1) = (0, h + 3, -2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(-1, 0, -1, -1)$. (2 punti)

(b) Per $h = 1$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo. (2 punti)

(d) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(1, -1, 1)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(1, -1, 1)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & -1 \\ 0 & k-2 & 0 \\ 2k^2 & 0 & -2k+2 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esistono, due valori distinti $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che A_{k_1} sia simile a A_{k_2}. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio $U =< (0,1,-2),(1,1,-3) >$ ed il vettore $v = (-4,3,-2)$.

(a) Determinare una base ortonormale di U. (2 punti)

(b) Determinare una base di $< v >^{\perp}$. (2 punti)

(c) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(v)$ del vettore v sul sottospazio U. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $w \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||w|| = \sqrt{35}$ e $p_U(w) = p_U(v)$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il punto $P = (0,1,-1)$, la retta

$$r : \begin{cases} -x + y - z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

ed il piano $\pi = (0,0,-1)+ < (1,1,0),(0,1,1) >$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π ed una forma parametrica della retta r . (2 punti)

(b) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto P. (2 punti)

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il piano π. (2 punti)

(d) Determinare posizione reciproca e distanza tra la retta r e la retta $s = \pi \cap \pi'$, dove π' è il piano contenente la retta r ed il punto P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

16 settembre 2014

TEORIA

1. Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che $V = U \oplus W$. Definire la simmetria σ di asse U e direzione W e dimostrare che σ^3 è ancora una simmetria. Determinare asse e direzione di σ^3.
2. Sia $\Phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^6$. Definire nucleo e immagine di Φ. Si può avere $\mathrm{rk}(\Phi) = 3$ se $\Phi^2 = 0$? In caso affermativo fornire un esempio, in caso negativo dare una breve dimostrazione.
3. Definire l'angolo tra due vettori u, v di $\mathbb{R}^3$ ed esibire esplicitamente due vettori u, v di $\mathbb{R}^3$ formanti un angolo di $\pi/6$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}+7i}{\sqrt{3}+i} - \frac{\sqrt{3}}{2}(-1+i)^2$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(1,-1,0,0) = (1,2,-1), \qquad \phi_h(0,1,1,0) = (-1,h,-1),$$

$$\phi_h(0,0,-1,0) = (h,2,h-2), \qquad \phi_h(0,0,0,-1) = (0,h+2,-2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(1,0,1,1)$. (2 punti)

(b) Per $h = 1$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo. (2 punti)

(d) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(1,-1,1)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(1,-1,1)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -2k & 2(k+1)^2 & 0 \\ -1 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esistono, due valori distinti $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che A_{k_1} sia simile a A_{k_2}. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio $U =< (2, 0, 1), (3, -1, 1) >$ ed il vettore $v = (2, 4, 3)$.

(a) Determinare una base ortonormale di U. (2 punti)

(b) Determinare una base di $< v >^\perp$. (2 punti)

(c) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(v)$ del vettore v sul sottospazio U. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $w \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||w|| = \sqrt{35}$ e $p_U(w) = p_U(v)$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il punto $P = (1, 0, 1)$, la retta

$$r : \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

ed il piano $\pi = (1, 0, 0)+ < (0, -1, 1), (-1, 0, 1) >$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π ed una forma parametrica della retta r . (2 punti)

(b) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto P. (2 punti)

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il piano π. (2 punti)

(d) Determinare posizione reciproca e distanza tra la retta r e la retta $s = \pi \cap \pi'$, dove π' è il piano contenente la retta r ed il punto P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE B
Docente: Francesco Esposito

16 settembre 2014

TEORIA

1. Sia $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ di rango 3. Definire nucleo e immagine di Φ e calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di Φ. Cosa si può dire sul rango di Φ^2 se $\mathbb{R}^5 = \mathrm{Im}(\Phi) \oplus \ker(\Phi)$?
2. Dare la definizione di matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{A}$ alla base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale V e dimostrare che l'inversa è ancora una matrice di cambiamento di base. Rispetto a quali basi?
3. Siano U, W due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che $V = U \oplus W$. Definire la simmetria σ di asse W e direzione U e dimostrare che σ^{-1} è ancora una simmetria. Determinare asse e direzione di σ^{-1}.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)^2 + \frac{7+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

(2 punti)

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(1,1,0,0) = (1,2,-1), \qquad \phi_h(0,-1,1,0) = (-1,h+1,-1),$$

$$\phi_h(0,0,-1,0) = (h+1,2,h-1), \qquad \phi_h(0,0,0,1) = (0,h+3,-2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(1,0,1,-1)$. (2 punti)

(b) Per $h = 1$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$. (2 punti)

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo. (2 punti)

(d) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, determinare la controimmagine $\phi_h^{-1}\{(1,-1,1)\}$ tramite ϕ_h del vettore $(1,-1,1)$. (2 punti)

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 0 & -2k+2 & -2k^2 \\ 0 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica. (2 punti)

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile. (2 punti)

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile. (2 punti)

(d) Determinare, se esistono, due valori distinti $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che A_{k_1} sia simile a A_{k_2}. (2 punti)

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio $U =< (-1, 2, 0), (-1, 3, 1) >$ ed il vettore $v = (-3, 2, -4)$.

(a) Determinare una base ortonormale di U. (2 punti)

(b) Determinare una base di $< v >^{\perp}$. (2 punti)

(c) Determinare la proiezione ortogonale $p_U(v)$ del vettore v sul sottospazio U. (2 punti)

(d) Determinare tutti i vettori $w \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $||w|| = \sqrt{35}$ e $p_U(w) = p_U(v)$. (2 punti)

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il punto $P = (-1, 1, 0)$, la retta

$$r : \begin{cases} -x + y - z = -1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$$

ed il piano $\pi = (0, 1, 0)+ < (-1, 0, 1), (-1, -1, 0) >$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π ed una forma parametrica della retta r . (2 punti)

(b) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto P. (2 punti)

(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il piano π. (2 punti)

(d) Determinare posizione reciproca e distanza tra la retta r e la retta $s = \pi \cap \pi'$, dove π' è il piano contenente la retta r ed il punto P. (2 punti)

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.