Appello del 7/7/2014 (tema A)

Esercizio 1:

$$z^4 = \frac{2+2i}{1-i} = 2\,\frac{(1+i)}{(1-i)}\cdot\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{2\cdot 2i}{2} = 2i$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Per De Moivre si ha

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right)$$

per $k=0,1,2,3$ si hanno le quattro radici distinte

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i\sin\frac{9}{8}\pi\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi\right)$$

Esercizio 2:

(a) Determiniamo delle equazioni per U.

La generica equazione nelle $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ è

$$a x_{11} + b x_{12} + c x_{21} + d x_{22} = 0$$

Imponendo che si verificata dai generatori di U si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a + b \qquad - d = 0 \\ 2a \qquad + c + d = 0 \end{cases}$$

Esplicitando le variabili b, c si ottiene

$$\begin{cases} b = -a + d \\ c = -2a - d \end{cases}$$

per $(a,d) = (1,0)$ si ottiene $(a,b,c,d) = (1,-1,-2,0)$

per $(a,d) = (0,1)$ si ottiene $(a,b,c,d) = (0,1,-1,1)$

Dunque si ha

$$U: \begin{cases} x_{11} - x_{12} - 2x_{21} = 0 \\ x_{12} - x_{21} + x_{22} = 0 \end{cases}$$

Determiniamo $U \cap W$.

Si ha $U \cap W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} x_{11} - x_{12} - 2x_{21} = 0 \\ x_{12} - x_{21} + x_{22} = 0 \end{cases} \right\}$

Si ottiene il seguente sistema in α, β:

$$\begin{cases} -5\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dunque $\beta = 0$ e ne segue

$U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. U e W non sono in somma diretta.

(b) Abbiamo già determinato le seguenti equazioni per U:

$$U : \begin{cases} x_{11} - x_{12} - 2x_{21} = 0 \\ x_{12} - x_{21} + x_{22} = 0 \end{cases}$$

(c) Si ha $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, dunque

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U + W$

che completa una base di $U \cap W$.

Dunque si può prendere $U' = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ e

$W' = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$.

Un'altra possibile scelta è

$$U' = W' = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Esercizio 3:

(a) Si ha

$$A_k = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\phi_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & k & k-1 \\ 2 & k & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Si ha

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Riducendo la matrice A_0 a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque si ha

$$\ker \phi_0 : \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z - w = 0 \end{cases}$$

per $(z,w) = (1,0)$ si ottiene $(-1,1,1,0)$
per $(z,w) = (0,1)$ si ottiene $(0,1,0,1)$

dunque una base di $\ker \phi_0$ è $\{(-1,1,1,0), (0,1,0,1)\}$
Poiché $\dim \ker \phi_0 = 2$ si ha $\dim \operatorname{Im} \phi_0 = 2$

dunque una base di $\mathrm{Im}\,\phi_0$ è

$\{(1,0,2),(0,1,0)\}$.

(c) Riduciamo A_k a scala

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & k-1 \\ 2 & k & 2 & 0 \end{matrix} \quad \xrightarrow[\mathrm{III}-2\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & k-1 \\ 0 & k & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-k\mathrm{II}} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k(1-k) & k(1-k) \end{matrix}$$

per $k \neq 0,1$ $\quad \mathrm{rk}\,A_k = 3$

dunque $\mathrm{Im}\,\phi_k = \mathbb{R}^3$

una base di $\mathrm{Im}\,\phi_k$ è $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

e risolvendo il sistema si ha

$\ker \phi_k = \langle (1,0,-1,1) \rangle$

per $k=0$ $\quad \mathrm{rk}\,A_0 = 2$

abbiamo già visto che $\ker \phi_0 = \langle (-1,1,1,0),(0,1,0,1) \rangle$

e $\mathrm{Im}\,\phi_0 = \langle (1,0,2),(0,1,0) \rangle$.

per $k=1$ $\quad rk\, A_1 = 2$

Si ha

$\mathrm{Im}\,\phi_1 = \langle (1,1,2), (0,1,1) \rangle$

e $\ker \phi_1 = \langle (1,0,-1,0), (0,0,0,1) \rangle$

(d) Si ha $\phi_k(0,0,0,1) = (0, k-1, 0)$

dunque per $k \neq 1$ si ha

$\phi_k\left(\frac{1}{k-1}(0,0,0,1)\right) = (0,1,0)$

dunque per $k \neq 0,1$ si ha

$\phi_k^{-1}\{(0,1,0)\} = \left(0,0,0,\frac{1}{k-1}\right)$

per $k=0$ si ha

$\phi_0^{-1}\{(0,1,0)\} = (0,0,0,-1) + \langle (-1,1,1,0), (0,1,0,1) \rangle$

per $k=1$ si ha

$(0,1,0) \notin \langle (1,1,2), (0,1,1) \rangle = \mathrm{Im}\,\phi_1$

dunque si ha $\phi_1^{-1}\{(0,1,0)\} = \emptyset$.

Esercizio 4:

(a) Determiniamo il polinomio caratteristico di A

$$P(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 3 & 4-t & 1 \\ -3 & -1 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$-t\left(t^2 - 6t + 9\right) = -t\,(t-3)^2$$

Dunque gli autovalori di A sono

0 con molt. alg. 1

3 con molt. alg. 2

Determiniamo il polinomio caratteristico di B

$$P(t) = \det(B - tI) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ -1 & 1 & 2-t \end{pmatrix}$$

$$= (2-t)\left(t^2 - 4t + 3\right) - (3-t) - (3-t)$$

$$= -t^3 + 6t^2 - 9t = -t\left(t^2 - 6t + 9\right) = -t\,(t-3)^2$$

Dunque gli autovalori di B sono

0 con molt. alg. 1

3 con molt. alg. 2

(b) autovalore 0

$$V_0 = \ker B = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,1) \rangle$$

una base di V_0 è $\{(1,-1,1)\}$.

autovalore 3

$$V_3 = \ker (B - 3I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$$

una base di V_3 è $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$.

(c) B è ortogonalmente diagonalizzabile poiché è una matrice simmetrica.

Determiniamo una base ortonormale di autovettori di B.

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} (1,-1,1) \right\}$ è una base ortonormale di V_0

Applicando Gram-Schmidt alla base $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ di V_3 si ottiene

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1,0)$$

$$u_2' = (0,1,1) - \left((0,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1,0) \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1,0)$$

$$= (0,1,1) - \frac{1}{2} (1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$$

dunque $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) \right\}$ è una base

ortonormale di V_3.

Si conclude che possiamo scegliere

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

e $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(d) A e B hanno stesso polinomio caratteristico e B è diagonalizzabile, dunque sono simili se e solo se A è diagonalizzabile.

Determiniamo l'autospazio V_3 di A.

$$V_3 = \ker(A-3I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1) \rangle$$

$\dim V_3 = 1 \neq 2$

dunque A non è diagonalizzabile e si conclude che A e B non sono simili.

Esercizio 5:

(a) una forma cartesiana di r è

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

una forma parametrica di π_α è

$$\pi_\alpha = (1,0,0) + \langle (\alpha+1,-1,0), (\alpha,0,-1) \rangle$$

(b) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha+1 & \alpha \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\alpha + 1$$

dunque per $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ r e π_α sono incidenti

e per $\alpha = -\frac{1}{2}$ r e π_α sono paralleli

disgiunti poiché $(0,1,0) \notin \pi_{-1/2}$

(c) per $\alpha \neq -1/2$ si ha

$$\operatorname{dist}(r, \pi_\alpha) = 0$$

per $\alpha = -1/2$ si ha

$$\operatorname{dist}(r, \pi_{-1/2}) = \operatorname{dist}((0,1,0), \pi_{-1/2}) = \frac{|-\frac{1}{2}|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(d) Si vede che $(1,0,0) \in \pi_\alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

ed inoltre $(1,-1,1) = (\alpha+1,-1,0) - (\alpha,0,-1)$ è

un vettore parallelo a $\pi_\alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Dunque la retta

$(1,0,0) + \langle (1,-1,1) \rangle$ giace su ogni piano π_α

poiché i piani π_α sono distinti, l'intersezione

coincide con questa retta.