A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

16 giugno 2015

TEORIA

1. Sia $\Sigma = v + U$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{10,8}(\mathbb{R})$ e b diverso dal vettore nullo di $\mathbb{R}^{10}$. Calcolare la dimensione del sottospazio $U+ < v >$ di $\mathbb{R}^8$ ed il rango della matrice completa del sistema sapendo che $\dim(U) = 6$.
2. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile di rango 1 tale che $\phi(1,2) = (-2,-4)$. Determinare una base ortonormale del nucleo di ϕ ed il polinomio caratteristico di ϕ.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = \frac{-3+i}{2+i} - (1+i)$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(1,-1,0) = (1,-1,h,0), \qquad \phi_h(0,1,-1) = (2,h,2,h+2), \qquad \phi_h(0,0,1) = (-1,-1,h-2,-2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(-1,2,0)$.

(b) Per $h = 1$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è iniettivo.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 3 & 4 & -k-1 \\ 1 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali A_k è invertibile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1,-1,1)$ è autovettore di A_k. Rispetto a quale autovalore?

(c) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile?

(d) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U : 2x + y - z = 0$.

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su U; determinare $\pi(3, 1, 1)$ e $\pi^{-1}(\{(1, 1, 3)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il piano $\pi = (3, 1, 1)+ < (1, 0, 2), (1, 1, 3) >$, la retta

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

ed il punto $P = (-2, 7, 3)$.

(a) Determinare una forma cartesiana ed una forma parametrica della retta s ortogonale al piano π e passante per il punto P .

(b) Determinare posizione reciproca e distanza di r e π. La retta r è più vicina al piano π o alla retta s?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

16 giugno 2015

TEORIA

1. Sia $\Sigma = v + U$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{10,8}(\mathbb{R})$ e b diverso dal vettore nullo di $\mathbb{R}^{10}$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $U+ < v >$ di $\mathbb{R}^8$ ed il rango della matrice completa del sistema sapendo che $\dim(U) = 5$.
2. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile di rango 1 tale che $\phi(3, 2) = (-6, -4)$. Determinare una base ortonormale del nucleo di ϕ ed il polinomio caratteristico di ϕ.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = \frac{-3 - i}{2 - i} - (1 - i)$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(-1, 0, -1) = (1, -1, h - 1, 0), \qquad \phi_h(0, -1, 1) = (2, h - 1, 2, h + 1), \qquad \phi_h(0, 1, 0) = (-1, -1, h - 3, -2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(1, 0, 2)$.

(b) Per $h = 2$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è iniettivo.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ -1 & k^2 & 1 \\ -3 & k-1 & 4 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali A_k è invertibile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(-1, 1, -1)$ è autovettore di A_k. Rispetto a quale autovalore?

(c) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile?

(d) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U : -2x - y + z = 0$.

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su U; determinare $\pi(-3, 1, 1)$ e $\pi^{-1}(\{(-1, 3, 1)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il piano $\pi = (-3, 1, 1)+ < (-1, 2, 0), (-1, 3, 1) >$, la retta

$$r : \begin{cases} -x - z = 2 \\ -x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

ed il punto $P = (2, 3, 7)$.

(a) Determinare una forma cartesiana ed una forma parametrica della retta s ortogonale al piano π e passante per il punto P .

(b) Determinare posizione reciproca e distanza di r e π. La retta r è più vicina al piano π o alla retta s?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

16 giugno 2015

TEORIA

---

1. Sia $\Sigma = v + U$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{9,7}(\mathbb{R})$ e b diverso dal vettore nullo di $\mathbb{R}^9$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $U+ < v >$ di $\mathbb{R}^7$ ed il rango della matrice completa del sistema sapendo che $\dim(U) = 4$.

2. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile di rango 1 tale che $\phi(-1, 2) = (2, -4)$. Determinare una base ortonormale del nucleo di ϕ ed il polinomio caratteristico di ϕ.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = 1 + i - \frac{-3 + i}{2 + i}$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(0, 1, 1) = (1, -1, h, 0), \qquad \phi_h(-1, -1, 0) = (2, h, 2, h + 2), \qquad \phi_h(1, 0, 0) = (-1, -1, h - 2, -2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(0, -2, -1)$.

(b) Per $h = 1$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è iniettivo.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & 1 \\ k+1 & 4 & -3 \\ k+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali A_k è invertibile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 1, 1)$ è autovettore di A_k. Rispetto a quale autovalore?

(c) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile?

(d) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U : -x - y + 2z = 0$.

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su U; determinare $\pi(1, -1, 3)$ e $\pi^{-1}(\{(3, -1, 1)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il piano $\pi = (1, -1, 3)+ < (2, 0, 1), (3, -1, 1) >$, la retta

$$r : \begin{cases} y + z = 2 \\ -x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

ed il punto $P = (3, -7, -2)$.

(a) Determinare una forma cartesiana ed una forma parametrica della retta s ortogonale al piano π e passante per il punto P .

(b) Determinare posizione reciproca e distanza di r e π. La retta r è più vicina al piano π o alla retta s?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

16 giugno 2015

TEORIA

---

1. Sia $\Sigma = v + U$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{9,7}(\mathbb{R})$ e b diverso dal vettore nullo di $\mathbb{R}^9$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $U + < v >$ di $\mathbb{R}^7$ ed il rango della matrice completa del sistema sapendo che $\dim(U) = 3$.

2. Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile di rango 1 tale che $\phi(-4, 2) = (2, -1)$. Determinare una base ortonormale del nucleo di ϕ ed il polinomio caratteristico di ϕ.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^3 = (1 - i) - \frac{-3 - i}{2 - i}$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(-1, 1, 0) = (1, -1, h - 1, 0), \qquad \phi_h(1, 0, 1) = (2, h - 1, 2, h + 1), \qquad \phi_h(0, 0, -1) = (-1, -1, h - 3, -2).$$

(a) Determinare $\Phi_h(2, -1, 0)$.

(b) Per $h = 2$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è iniettivo.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -k+1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ -1 & -1 & k^2 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali A_k è invertibile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(-1, 1, -1)$ è autovettore di A_k. Rispetto a quale autovalore?

(c) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile?

(d) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è simile alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U : x + 2y + z = 0$.

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su U; determinare $\pi(1, 3, -1)$ e $\pi^{-1}(\{(1, 1, -3)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino il piano $\pi = (1, 3, -1)+ < (0, 1, -2), (1, 1, -3) >$, la retta

$$r : \begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + y + z = -2 \end{cases}$$

ed il punto $P = (7, -2, -3)$.

(a) Determinare una forma cartesiana ed una forma parametrica della retta s ortogonale al piano π e passante per il punto P .

(b) Determinare posizione reciproca e distanza di r e π. La retta r è più vicina al piano π o alla retta s?

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.