Appello del 16/6/2015 (tema A)

Esercizio 1:

$$z^3 = \frac{-3+i}{2+i} - (1+i) = \frac{(-3+i)(2-i)}{5} - (1+i)$$

$$= \frac{-5+5i}{5} - (1+i) = -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Per de Moivre l'equazione ha 3 radici della forma:

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$

per $k = 0,1,2$

Dunque le soluzioni dell'equazione sono

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1 = -\sqrt[3]{2}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Esercizio 2 :

(a) Si ha $(-1,2,0) = -(1,-1,0) + (0,1,-1) + (0,0,1)$

dunque

$$\phi_h(-1,2,0) = -\phi_h(1,-1,0) + \phi_h(0,1,-1) + \phi_h(0,0,1) =$$

$$= -(1,-1,h,0) + (2,h,2,h+2) + (-1,-1,h-2,-2)$$

$$= (0,h,0,h) = h\,(0,1,0,1)$$

(b) Poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, l'insieme

$\mathcal{V} = \{(1,-1,0), (0,1,-1), (0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

La matrice associata a ϕ_1 rispetto alle basi $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^3$ ed alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ è

$$A = A_{\mathcal{V},\mathcal{E},\phi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

riducendo tale matrice in forma scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\operatorname{rk} A = 2$, da cui segue
$\dim(\operatorname{Im}\phi_1) = 2$ e $\dim(\ker\phi_1) = 1$.

Una base di $\mathrm{Im}\,\phi_1$ è data ad esempio dalle prime due colonne di A:

$$\mathrm{Im}\,\phi_1 = \langle (1,-1,1,0), (2,1,2,3) \rangle$$

Per trovare il nucleo di ϕ_1 risolviamo il sistema

$$A\,\underline{x} = \underline{0} \qquad \text{con} \quad A = A_{v,\varepsilon,\phi_1}$$

riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \phantom{x+{}} 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni costituiscono il sottospazio $\langle (-1,2,3) \rangle$.

Dunque il vettore $-(1,-1,0) + 2(0,1,-1) + 3(0,0,1)$ genera $\ker\phi_1$:

$$\ker\phi_1 = \langle (-1,3,1) \rangle$$

(c) Sia

$$A_h = A_{\mathcal{V},\mathcal{E},\phi_h} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & h & -1 \\ h & 2 & h-2 \\ 0 & h+2 & -2 \end{pmatrix}$$

Allora ϕ_h non è iniettivo se e solo se $\operatorname{rk} A_h < 3$.

Calcoliamo il rango di A_h riducendo la matrice in forma a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & h & -1 \\ h & 2 & h-2 \\ 0 & h+2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-h\mathrm{I}]{\mathrm{II}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & h+2 & -2 \\ 0 & 2-2h & -2+2h \\ 0 & h+2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}+2\mathrm{II}]{\mathrm{IV}-\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & h+2 & -2 \\ 0 & 6 & -6+2h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3+h \\ 0 & h+2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui segue che $\operatorname{rk} A_h < 3$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -3+h \\ h+2 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

cioè $$-6 - (h^2 - h - 6) = 0$$

Ossia $h^2 - h = 0$. Si conclude che ϕ_h non è iniettiva per $h = 0, 1$.

Esercizio 3 :

(a)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 3 & 4 & -k-1 \\ 1 & 1 & k^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 4k^2 + k+1 + (k+1)(-1) = 4k^2$$

Dunque A_k è invertibile se e solo se $k \neq 0$.

(b) Si ha

$$A_k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ -k-2 \\ k^2 \end{pmatrix}$$

Dunque $(1,-1,1)$ è autovettore di A_k se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} k+2 = \alpha \\ -k-2 = -\alpha \\ k^2 = \alpha \end{cases}$$

Ossia se e solo se $k^2 = k+2$

Segue che $(1,-1,1)$ è autovettore di A_k per

$k = -1$, relativamente all'autovalore 1

$k = 2$, relativamente all'autovalore 4.

(c) Determiniamo il polinomio caratteristico di A_k:

$$P_{A_k}(t) = \det\left(A_k - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & k+1 \\ 3 & 4-t & -k-1 \\ 1 & 1 & k^2-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)\left[(4-t)(k^2-t) + k+1\right] + (k+1)(t-1)$$

$$= (1-t)(4-t)(k^2-t)$$

<u>caso $k \neq \pm 1, \pm 2$:</u>

A_k ha autovalori:

1 di molt. alg. 1

4 di molt. alg. 1

k^2 di molt. alg. 1

<u>caso $k = \pm 1$:</u>

A_k ha autovalori:

1 di molt. alg. 2

4 di molt. alg. 1

Determiniamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 1.

$$m.g.\,1 = 3 - rk\left(A_k - I_3\right) = 3 - rk\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+1 \\ 3 & 3 & -k-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque per $k=1$ la molt. geom. di 1 è 1;

per $k=-1$ la molt. geom. di 1 è 2.

caso $k = \pm 2$:

A_k ha autovalori

1 di molt. alg. 1

4 di molt. alg. 2

determiniamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 4.

$$m.g.\ 4 = 3 - rk\left(A_k - 4I_3\right) = 3 - rk\begin{pmatrix} -3 & 0 & k+1 \\ 3 & 0 & -k-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \quad \text{sia per } k=2 \text{ che per } k=-2$$

Si può concludere che A_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1, 2, -2$

(d) Il polinomio caratteristico di B è

$$P_B(t) = \det(B - tI_3) = (1-t)^2(4-t)$$

Inoltre la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è

$$3 - \operatorname{rk}(B - I_3) = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Dunque B è diagonalizzabile.

Una matrice è simile a B se e solo se è diagonalizzabile ed ha stesso polinomio caratteristico.

Si conclude che A_k è simile a B se e solo se $k = -1$.

Esercizio 4:

(a) Risolvendo l'equazione di U si ottiene

$$U = \langle (1,-2,0), (0,1,1) \rangle$$

Ortonormalizziamo la base $\{(0,1,1), (1,-2,0)\}$ di U.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

$$u_2' = (1,-2,0) - \big((1,-2,0)\cdot u_1\big)u_1 =$$

$$= (1,-2,0) - \frac{-2}{2}(0,1,1) = (1,-1,1)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

Una base ortonormale di U è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \right\}$$

(b) Si ha che

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (2,1,-1) \right\}$$ è una base di $U^{\perp}$.

Dunque

$$\pi(3,1,1) = (3,1,1) - \left((3,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (2,1,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{6}} (2,1,-1)$$

$$= (3,1,1) - (2,1,-1) = (1,0,2)$$

e poiché $(1,1,3) \in U = \operatorname{Im} \pi$, si ha

$$\pi^{-1}(\{(1,1,3)\}) = (1,1,3) + \ker \pi = (1,1,3) + U^{\perp}$$

$$= (1,1,3) + \langle (2,1,-1) \rangle .$$

Esercizio 5:

(a) Si ha $s = P + \langle v \rangle$, con $\langle v \rangle = \langle (1,0,2),(1,1,3) \rangle^{\perp}$.

Dunque

$$s = (-2,7,3) + \langle (2,1,-1) \rangle$$

cioè

$$s: \begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = 7 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Eliminando tra queste equazioni il parametro α, si ottiene

$$s: \begin{cases} x + 2z = 4 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

(b) Risolvendo il sistema di equazioni che definiscono r si ottiene

$$r = (2,0,4) + \langle (1,1,3) \rangle$$

Poiché $(1,1,3) \in \langle (1,0,2), (1,1,3) \rangle$

la retta r ed il piano π sono paralleli.

Inoltre si ha

$$\operatorname{dist}(r, \pi) = \operatorname{dist}((2,0,4), \pi)$$

Determinando un'equazione di π si ottiene

$$\pi : \quad 2x + y - z - 6 = 0$$

Dunque

$$\operatorname{dist}(r, \pi) = \operatorname{dist}((2,0,4), \pi) = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Si deduce inoltre che la retta r non appartiene al piano π.

Le rette r e s non sono parallele, dunque

$$\operatorname{dist}(r, s) = \frac{\left| \left((2,0,4) - (-2,7,3) \right) \cdot \left((1,1,3) \times (2,1,-1) \right) \right|}{\| (1,1,3) \times (2,1,-1) \|}$$

$= \sqrt{66}$. Si conclude che r è più vicina a π che a s.