A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

3 luglio 2015

TEORIA

---

1. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2 + 2t$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$.

2. Siano π_1, π_2, π_3 tre piani dello spazio euclideo a due a due ortogonali. Determinare la posizione reciproca e la distanza tra le rette $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $s = \pi_1 \cap \pi_3$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^5 = (1+i)^2 + 3\frac{1+2i}{2-i}$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x, y, z, w) = (x + (h-1)z + hw,\ y + z + 2w,\ x + y + hz + (h+2)w).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a Φ_h rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Per $h = 0$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo.

(d) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tale che si abbia che l'insieme $\Sigma_h = \Phi_h^{-1}(\{(2, 1, -1)\})$ sia non vuoto.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k-1 & 0 \\ 0 & 2-k & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare, se esiste, un valore $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia ortogonalmente diagonalizzabile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(c) Determinare una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $A_1 = H^{-1}DH$.

(d) Determinare un valore del parametro k_1, diverso da -2, tale che la matrice A_{k_1} sia simile alla matrice A_{-2} .

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio

$$U =< (1, 0, -1), (1, 2, 0), (0, 2, 1) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(2, 1, 3)$ sul sottospazio U.

(c) Determinare l'insieme Σ di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia il vettore $(1, 2, 0)$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i punti $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, -1, 1)$, $C = (4, 1, 0)$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π contenente i punti A, B e C .

(b) Determinare una retta r tale che si abbia $\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(r, A) = \text{dist}(r, B) = \sqrt{6}$.

(d) Determinare la distanza tra la retta r e la retta s ortogonale al piano π e passante per il punto C.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

3 luglio 2015

TEORIA

1. Siano π_1, π_2, π_3 tre piani dello spazio euclideo a due a due ortogonali. Determinare la posizione reciproca e la distanza tra le rette $r = \pi_1 \cap \pi_3$ e $s = \pi_2 \cap \pi_3$.
2. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2 + 3t$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^4 = 3(1+i)^2 - \frac{1+2i}{2-i}$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x,y,z,w) = (-x + (1+h)z + hw,\ x + y - hz - (h-2)w,\ y + z + 2w).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a Φ_h rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Per $h = 0$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo.

(d) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tale che si abbia che l'insieme $\Sigma_h = \Phi_h^{-1}(\{(-2,-1,1)\})$ sia non vuoto.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & k+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare, se esiste, un valore $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia ortogonalmente diagonalizzabile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(c) Determinare una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $A_{-1} = H^{-1}DH$.

(d) Determinare un valore del parametro k_1, diverso da 2, tale che la matrice A_{k_1} sia simile alla matrice A_2 .

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio

$$U =< (-1,-1,0), (-1,0,2), (0,1,2) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(-2,3,1)$ sul sottospazio U.

(c) Determinare l'insieme Σ di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia il vettore $(-1,0,2)$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i punti $A = (-1,1,0)$, $B = (0,1,-1)$, $C = (-4,0,1)$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π contenente i punti A, B e C .

(b) Determinare una retta r tale che si abbia $\text{dist}(r,\pi) = \text{dist}(r,A) = \text{dist}(r,B) = \sqrt{6}$.

(d) Determinare la distanza tra la retta r e la retta s ortogonale al piano π e passante per il punto C.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

3 luglio 2015

TEORIA

---

1. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2 - 2t$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$.

2. Siano π_1, π_2, π_3 tre piani dello spazio euclideo a due a due ortogonali. Determinare la posizione reciproca e la distanza tra le rette $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e $s = \pi_2 \cap \pi_3$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^5 = 2(1-i)^2 + 3\frac{1-2i}{2+i}$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x, y, z, w) = (x + y + hz + (h+2)w,\ -y - z - 2w,\ x + (h-1)z + hw).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a Φ_h rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Per $h = 0$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo.

(d) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tale che si abbia che l'insieme $\Sigma_h = \Phi_h^{-1}(\{(-1,-1,2)\})$ sia non vuoto.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-k & 0 \\ 0 & 1-k & k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare, se esiste, un valore $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia ortogonalmente diagonalizzabile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(c) Determinare una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $A_1 = H^{-1}DH$.

(d) Determinare un valore del parametro k_1, diverso da -2, tale che la matrice A_{k_1} sia simile alla matrice A_{-2} .

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio

$$U =< (-1,0,1),(0,-2,1),(1,-2,0) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(3,-1,2)$ sul sottospazio U.

(c) Determinare l'insieme Σ di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia il vettore $(0,-2,1)$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i punti $A = (1,0,1)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,-1,4)$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π contenente i punti A, B e C .

(b) Determinare una retta r tale che si abbia $\text{dist}(r,\pi) = \text{dist}(r,A) = \text{dist}(r,B) = \sqrt{6}$.

(d) Determinare la distanza tra la retta r e la retta s ortogonale al piano π e passante per il punto C.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

3 luglio 2015

TEORIA

1. Siano π_1, π_2, π_3 tre piani dello spazio euclideo a due a due ortogonali. Determinare la posizione reciproca e la distanza tra le rette $r = \pi_1 \cap \pi_3$ e $s = \pi_2 \cap \pi_3$.
2. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ avente polinomio caratteristico $P_\Phi(t) = t^2 - 3t$. Determinare il rango ed il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutti i numeri complessi che soddisfano l'equazione:

$$z^4 = -(1+i)^2 + 4\frac{1+2i}{2-i}$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ definito da

$$\phi_h(x, y, z, w) = (y + z + 2w,\ x - (h+1)z - hw,\ -x - y + hz + (h-2)w).$$

(a) Determinare la matrice A_h associata a Φ_h rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Per $h = 0$, determinare una base di $\ker(\phi_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(\phi_h)$.

(c) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tali che Φ_h non è suriettivo.

(d) Determinare tutti gli $h \in \mathbb{R}$ tale che si abbia che l'insieme $\Sigma_h = \Phi_h^{-1}(\{(1, 2, 1)\})$ sia non vuoto.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & -1 \\ -k-1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare, se esiste, un valore $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che A_{k_0} sia ortogonalmente diagonalizzabile.

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(c) Determinare una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che si abbia $A_{-1} = H^{-1}DH$.

(d) Determinare un valore del parametro k_1, diverso da 2, tale che la matrice A_{k_1} sia simile alla matrice A_2 .

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino il sottospazio

$$U =< (0,1,1),(2,1,0),(2,0,-1) > .$$

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,2,-3)$ sul sottospazio U.

(c) Determinare l'insieme Σ di tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia il vettore $(2,1,0)$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo usuale si considerino i punti $A = (0,1,-1)$, $B = (-1,0,-1)$, $C = (1,4,0)$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π contenente i punti A, B e C .

(b) Determinare una retta r tale che si abbia $\mathrm{dist}(r,\pi) = \mathrm{dist}(r,A) = \mathrm{dist}(r,B) = \sqrt{6}$.

(d) Determinare la distanza tra la retta r e la retta s ortogonale al piano π e passante per il punto C.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.