Appello del 3/7/2015 (tema A)

Esercizio 1:

$$z^5 = (1+i)^2 + 3\,\frac{1+2i}{2-i}$$

$$= 2i + 3\,\frac{(1+2i)(2+i)}{5} = 2i + 3\,\frac{5i}{5}$$

$$= 5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Per de Moivre, le soluzioni sono della forma

$$z_k = \sqrt[5]{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right)$$

con $k = 0,1,2,3,4$

Ossia le soluzioni sono:

$$z_0 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[5]{5}\;i$$

$$z_2 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10}\right)$$

$$z_4 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}\right).$$

Esercizio 2 :

(a)

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & h \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & h & h+2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Riducendo la matrice A_0 a scala tramite operazioni elementari sulle righe si ottiene

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{III - I} \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{III - II} \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Dunque $\operatorname{rk} A_0 = 2$, da cui $\dim \ker A_0 = 2$ e $\dim \operatorname{Im} A_0 = 2$. Inoltre z, w sono le variabili libere.

Dunque, risolvendo il sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z + 2w = 0 \end{cases}$

si ottiene $\ker A_0 = \langle (1,-1,1,0), (0,-2,0,1) \rangle$

Le prime due colonne di A_0 sono lin. ind., dunque formano una base di $\operatorname{Im} A_0$:

$\operatorname{Im} A_0 = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$.

(c) Φ_h è suriettivo se e solo se $\text{rk}\, A_h = 3$.

Calcoliamo dunque il rango di A_h.

Riducendo a scala A_h si ottiene:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & h-1 & h \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & h & h+2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \begin{matrix} 1 & 0 & h-1 & h \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{matrix} 1 & 0 & h-1 & h \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Dunque $\forall h \in \mathbb{R}$, $\text{rk}\, A_h = 2 \neq 3$.

Si conclude che Φ_h non è suriettiva per alcun valore di h.

(d) Poiché $\text{rk}\, A_h = 2$, segue che $\text{Im}\, \Phi_h = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$

Inoltre si ha $(2,1,-1) \notin \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$,

quindi $\Phi_h^{-1}(\{(2,1,-1)\}) = \emptyset \quad \forall h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3:

(a) $$A_k = \begin{pmatrix} k & k-1 & 0 \\ 0 & 2-k & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché l'entrata $(2,3)$ di A_k è 1 e l'entrata $(3,2)$ di A_k è 0, la matrice A_k non è simmetrica per alcun valore di k.

Dal teorema spettrale si conclude che A_k non è ortogonalmente diagonalizzabile per alcun valore di k.

(b) Calcolando il polinomio caratteristico di A_k si ottiene:

$$P(t) = \det(A_k - tI_3) = \det \begin{pmatrix} k-t & k-1 & 0 \\ 0 & 2-k-t & 1 \\ 0 & 0 & -1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (k-t)(2-k-t)(-1-t) = (t-k)(t-(2-k))(t+1)$$

Le radici di $P(t)$ sono: $-1, k, 2-k$.

Per calcolare la molteplicità algebrica degli autovalori di A_k discutiamo separatamente i seguenti casi:

(i) $k=-1$

(ii) $2-k=-1$ ossia $k=3$

(iii) $k=2-k$ ossia $k=1$

(iv) caso generico ossia $k \neq -1, 1, 3$.

caso (i):

Gli autovalori di A_{-1} sono:

-1 con molt. alg. 2

3 con molt. alg. 1

Studiamo la molt. geom. dell'autovalore -1:

Poiché $A_{-1} + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2,

segue che la molt. geom. di -1 è 1.

Dunque A_{-1} non è diagonalizzabile.

caso (ii):

Gli autovalori di A_3 sono:

-1 con molt. alg. 2

3 con molt. alg. 1

Studiamo la molt. geom. dell'autovalore -1:

Poiché $A_3 + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2,

segue che la molt. geom. di -1 è 1.

Dunque A_3 non è diagonalizzabile.

caso (iii):

Gli autovalori di A_1 sono:

-1 con molt. alg. 1

1 con molt. alg. 2

Studiamo la molt. geom. dell'autovalore 1:

Poiché $A_1 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 1,

segue che la molt. geom. dell'autovalore 1 è 2.

Dunque A_1 è diagonalizzabile.

caso (iv):

Per $k \neq -1, 1, 3$, la matrice A_k ha 3

autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile.

Riassumendo:

A_k è diagonalizzabile per $k \neq -1, 3$.

(c) Studiamo gli autospazi di $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

autovalore -1 :

$$V_{-1} = \ker\left(A_1 + I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-2) \rangle$$

autovalore 1 :

$$V_1 = \ker\left(A_1 - I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

Dunque si ha

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Si conclude che possiamo scegliere

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(d) Poiché A_{-2} è diagonalizzabile, è sufficiente trovare k_1 tale che A_{k_1} abbia stessi autovalori con stesse molt. alg. di A_{-2}. Gli autovalori di A_{-2} sono: $-1, -2, 4$.

Dunque è necessario scegliere $k_1 = 4$. Poiché A_4 è diagonalizzabile risulterà simile a A_{-2}.

Esercizio 4:

(a) Si ha $U = \langle (1,0,-1), (1,2,0), (0,2,1) \rangle = \langle (1,0,-1), (1,2,0) \rangle$

Per trovare una base ortonormale di U è sufficiente ortonormalizzare la base $\{(1,0,-1), (1,2,0)\}$.

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$u_2' = (1,2,0) - \left((1,2,0) \cdot \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$= (1,2,0) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1,4,1)$$

Dunque una base ortonormale di U è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{18}}(1,4,1)\right\}$.

(b) Si ha $U^\perp = \langle (2,-1,2) \rangle$ ed una base ortonormale di $U^\perp$ è $\left\{\frac{1}{3}(2,-1,2)\right\}$.

Dunque segue che

$$p_U(2,1,3) = (2,1,3) - \left((2,1,3) \cdot \frac{1}{3}(2,-1,2)\right)\frac{1}{3}(2,-1,2)$$

$$= (2,1,3) - (2,-1,2) = (0,2,1).$$

(c) Si ha $\Sigma = p_U^{-1}(\{(1,2,0)\}) = (1,2,0) + U^\perp = (1,2,0) + \langle (2,-1,2) \rangle$.

Esercizio 5:

(a) $\pi = A + \langle B-A, C-A \rangle$

$= (1,0,1) + \langle (-1,-1,0), (3,1,-1) \rangle$

Una equazione per π è:

$x - y + 2z - 3 = 0$

(b) Perché si abbia $\operatorname{dist}(r,\pi) = \operatorname{dist}(r,A) = \operatorname{dist}(r,B) = \sqrt{6}$ è necessario e sufficiente che la retta r sia la traslata della retta per i punti A, B, di un vettore ortogonale al piano π e di norma $\sqrt{6}$.

Dunque

$r = \big(A + (1,-1,2)\big) + \langle (B-A) \rangle$

$= (2,-1,3) + \langle (-1,-1,0) \rangle$

(c) La distanza richiesta è anche uguale alla distanza del punto C dalla retta passante per i punti A, B.

Calcoliamo tale distanza.

Troviamo la proiezione ortogonale del vettore $C-A$ sul sottospazio $\langle B-A \rangle^{\perp}$:

$$B-A = (-1,-1,0)$$

$$C-A = (3,1,-1)$$

Dunque il vettore cercato è

$$v = (3,1,-1) - \left((3,1,-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0) \right) \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)$$

$$= (3,1,-1) - (1,1,0) = (2,0,-1)$$

Si conclude che $\operatorname{dist}(r,s) = \| v \| = \| (2,0,-1) \| = \sqrt{5}$.