Appello del 21/9/2015 (tema A)

Esercizio 1:

$$z^2 = \frac{i}{i^5} + \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{i^4} + \frac{(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}{4}$$

$$= \quad = 1 + \frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

Per de Moivre si le seguenti due soluzioni:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$$

$$z_1 = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}$$

Esercizio 2:

(a) $U = \langle (1,1,0,0), (0,1,0,1) \rangle$

la generica equazione lineare omogenea nelle variabili x, y, z, w ha la forma:

$$ax + by + cz + dw = 0$$

Imponendo che sia soddisfatta dai generatori di U si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $(a, b, c, d) = (-b, b, c, -b)$.

Dunque si ha:

$$U : \begin{cases} z = 0 \\ -x + y - w = 0 \end{cases}$$

(b) $V = \langle (2,1,0,-1), (1,0,1,0) \rangle = \{ (2\alpha + \beta, \alpha, \beta, -\alpha) \}$

Imponendo che un vettore di V soddisfi le equazioni di U si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases}$$

Segue che si ha $U \cap V = \langle (2,1,0,-1) \rangle$

Completando la base $\{(2,1,0,-1)\}$ di $U \cap V$ si ottiene $U + V = \langle (2,1,0,-1), (0,1,0,1), (1,0,1,0) \rangle$.

(c) La condizione $\mathbb{R}^4 = W \oplus (U \cap V)$ implica $\dim(W) = 3$.

Tuttavia la condizione $W \cap U = \{(0,0,0,0)\}$ implica

$\dim W \leq 2$.

Non è quindi possibile soddisfare le due condizioni contemporaneamente. Si conclude che non esiste alcun sottospazio W con le proprietà richieste.

Esercizio 3:

(a) $$A_k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ k+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

dunque $(-1,3,-1)$ è autovettore di A_k per ogni valore di k reale, relativo all'autovalore $k+1$.

Segue $k_0 = 2$.

(b) Il polinomio caratteristico di A_k è:

$$P(t) = \det\left(A_k - tI_3\right) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & k \\ 0 & k+1-t & 0 \\ k & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= \left((k+1)-t\right)\left((1-t)^2 - k^2\right)$$

$$= \left((k+1)-t\right)\left((1-t)-k\right)\left((1-t)+k\right)$$

$$= \left((k+1)-t\right)\left((1-k)-t\right)\left((1+k)-t\right)$$

Segue che A_k ha i seguenti autovalori:

$k+1$ con molt. alg. 2
$1-k$ con molt. alg. 1
se $k \neq 0$; 1 di molt. alg. 3 se $k = 0$

Per la diagonalizzabilità studiamo l'autospazio relativo all'autovalore $k+1$.

$$V_{k+1} = \ker\left(A_k - (k+1)I_3\right) = \ker \begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k \end{pmatrix}$$

$\forall k \in \mathbb{R}$, si ha molt. geom. = molt. alg., dunque A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k reale.

(c) Il polinomio caratteristico di B è:

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & -2 \\ 0 & 2-t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t\,(t-2)^2$$

Dunque gli autovalori di B sono:

0 con molt. alg. 1

2 con molt. alg. 2

Studiamo l'autospazio relativo all'autovalore 2:

$$V_2 = \ker(B - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

Poiché sia B che A_k sono diagonalizzabili,

B e A_k sono simili se e solo se hanno lo stesso

polinomio caratteristico.

Segue che B e A_1 sono simili.

Ossia $k_1 = 1$, e tale scelta è unica.

(d) Troviamo una base di autovettori di B:

$V_2 = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

$$V_0 = \ker B = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,1) \rangle$$

Segue che $\{(1,0,0), (0,1,0), (1,-1,1)\}$ è una base di autovettori di B.

Si ha
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo una base di autovettori di A_k:

$$V_2 = \ker (A_1 - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,1) (0,1,0) \rangle$$

$$V_0 = \ker (A_1) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,-1) \rangle$$

Segue che $\{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,-1)\}$ è una base di autovettori di A_1.

Si ha
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Segue che si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dunque possiamo scegliere

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4:

(a) $V = \langle (1,-1,0), (0,1,-1) \rangle$

Una base ortonormale di V si ottiene ortonormalizzando la base $\{(0,1,-1), (1,-1,0)\}$ di V:

$$u_1 = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$u_2' = (0,1,-1) - \left((0,1,-1) \cdot \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} \right) \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$= (0,1,-1) + \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

$$u_2 = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}$$

Una base ortonormale di V è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\}$$

Inoltre $V^{\perp} = \langle (1,1,1) \rangle$

Dunque $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si ha

$$p_{v}^{-1}\left(\{(1,-2,1)\}\right) = (1,-2,1) + \langle (1,1,1) \rangle$$

$$= \{ (1+\alpha, -2+\alpha, 1+\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Imponiamo che la norma di $(1+\alpha, -2+\alpha, 1+\alpha)$ sia 3:

$$(1+\alpha)^2 + (-2+\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 = 9$$

Segue $3\alpha^2 + 6 = 9$, ossia $\alpha = \pm 1$.

Dunque possiamo scegliere

$$v = (1,-2,1) + (1,1,1) = (2,-1,2).$$

(c) Esiste un unico sottospazio W soddisfacente le proprietà richieste:

$$W = \langle (1,-2,1), (1,1,1) \rangle .$$

Esercizio 5:

Risolvendo il sistema che definisce r_a si ottiene:

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 1-2a \\ -2a & 1 & 2 & 2a(1-2a) \end{matrix} \xrightarrow{\mathrm{II}-2a\mathrm{I}} \begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 1-2a \\ 0 & 1-2a & 2-2a & 0 \end{matrix}$$

Dunque

$$r_a = (2a-1, 0, 0) + \langle (1, 2-2a, 2a-1) \rangle .$$

Troviamo una forma cartesiana di s:

$$s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

Da cui segue

$$s: \begin{cases} x + z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases} .$$

(b)

$$r_a = (2a-1,0,0) + \langle (1, 2-2a, (2a-1)) \rangle$$

$$s = (1,0,0) + \langle (1,2,-1) \rangle$$

r_a e s sono parallele se e solo se

$$\langle (1, 2-2a, 2a-1) \rangle = \langle (1,2,-1) \rangle$$

dunque se e solo se $a = 0$.

Inoltre r_a e s sono complanari se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2-2a & 2a-1 \\ 2a-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

dunque r_a e s sono complanari se e solo se

$$(2a-2)(2a) = 0$$

Ovvia, se e solo se $a = 0, 1$.

In conclusione:

r_0 è parallela ad s

r_1 è incidente con s

r_a è sghemba con s per $a \neq 0, 1$.

(c) $r_0 = (-1,0,0) + \langle (1,2,-1) \rangle$

$s = (1,0,0) + \langle (1,2,-1) \rangle$

dunque

$$\mathrm{dist}(r_0, s) = \left\| (2,0,0) - \left((2,0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (1,2,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{6}} (1,2,-1) \right\|$$

$$= \left\| (2,0,0) - \frac{1}{3} (1,2,-1) \right\|$$

$$= \frac{1}{3} \left\| (5,-2,1) \right\| = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

(d) Poiché $r_a = (2a-1,0,0) + \langle (1, 2-2a, 2a-1) \rangle$

è sufficiente prendere

$t = (0,0,0) + \langle (1,0,0) \rangle$

in forma cartesiana

$$t : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$