A

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

23 giugno 2016

TEORIA

1. Dare la definizione di spazio vettoriale ed un esempio di un sottospazio di dimensione 4 di $\mathbb{R}^6$ contenente il vettore $(1,0,1,0,0,0)$.
2. Enunciare il teorema delle dimensioni e determinare il minimo dell'insieme
$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} \mid \ n = \dim(\ker(A)),\ \text{con } A \in \mathcal{M}_{10,4}(\mathbb{R})\}.$$
3. Dare la definizione di autovalore e di autovettore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale; dare inoltre un esempio esplicito di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ avente autovalori 5 e 7 con molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 3.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le radici complesse del polinomio
$$(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i)X^4+(6+9i)X$$

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni:

$$\Phi(1,0,0,-1) = (1,-1,0)\ ,\ \Phi(0,1,-1,0) = (0,1,-1)\ ,\ \Phi(0,0,1,-1) = (1,-2,1),\ \Phi(0,0,0,1) = (0,0,0).$$

(a) Determinare $\Phi(1,2,0,0)$.

(b) Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi}$ associata a Φ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Determinare $\Phi^{-1}(\{(2,-1,-1)\})$.

(d) Determinare tutti i vettori $v \in <(1,0,0,-1),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1)>$ tali che $\Phi(v) = (0,0,0)$.

Esercizio 3. Si considerino la matrice
$$A_k = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2k-3 \\ 0 & 2k-3 & -3 \end{pmatrix}$$
dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è invertibile.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di A_k, gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, siano $U : x+y-z = 0$ e $W =< (4, 1, -2), (2, 1, 0) >$.

(a) Determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $W^{\perp}$.

(b) Sia p_W la proiezione ortogonale su W. Determinare $p_W(4, -1, 0)$ e $p_W^{-1}(\{(2, 1, 1)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino il punto $P = (1, 1, -1)$, la retta $r = P+ < (1, -2, 1) >$ ed il piano $\pi : x - 2y = 1$.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica del piano π.

(b) Determinare la retta s ortogonale alla retta r, parallela al piano π e passante per il punto P.

(c) Determinare la distanza della retta r dal punto $O = (0, 0, 0)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

23 giugno 2016

TEORIA

1. Enunciare il teorema delle dimensioni e determinare il minimo dell'insieme
$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} \mid \ n = \dim(\ker(A)), \text{ con } A \in \mathcal{M}_{9,5}(\mathbb{R})\}.$$
2. Dare la definizione di autovalore e di autovettore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale; dare inoltre un esempio esplicito di un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ avente autovalori 4 e 7 con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 3.
3. Dare la definizione di spazio vettoriale ed un esempio di un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^6$ contenente il vettore $(1,0,0,1,0,0)$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le radici complesse del polinomio
$$(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i)X^4 + (4-6i)X$$

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(-1,0,0,-1),(0,-1,1,0),(0,1,0,-1),(0,0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni:

$\Phi(-1,0,0,-1) = (1,-1,0)$, $\Phi(0,-1,1,0) = (0,1,-1)$, $\Phi(0,1,0,-1) = (1,-2,1)$, $\Phi(0,0,0,1) = (0,0,0)$.

(a) Determinare $\Phi(-1,0,2,0)$.

(b) Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi}$ associata a Φ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Determinare $\Phi^{-1}(\{(2,-1,-1)\})$.

(d) Determinare tutti i vettori $v \in < (-1,0,0,-1),(0,-1,1,0),(0,1,0,-1) >$ tali che $\Phi(v) = (0,0,0)$.

Esercizio 3. Si considerino la matrice
$$A_k = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -k-3 \\ 0 & -k-3 & -3 \end{pmatrix}$$
dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è invertibile.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di A_k, gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, siano $U : -x+y+z = 0$ e $W =< (-4, -2, 1), (-2, 0, 1) >$.

(a) Determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $W^\perp$.

(b) Sia p_W la proiezione ortogonale su W. Determinare $p_W(-4, 0, -1)$ e $p_W^{-1}(\{(-2, 1, 1)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino il punto $P = (-1, -1, 1)$, la retta $r = P+ < (-1, 1, -2) >$ ed il piano $\pi : -x - 2z = 1$.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica del piano π.

(b) Determinare la retta s ortogonale alla retta r, parallela al piano π e passante per il punto P.

(c) Determinare la distanza della retta r dal punto $O = (0, 0, 0)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

23 giugno 2016

TEORIA

1. Enunciare il teorema delle dimensioni e determinare il minimo dell'insieme
$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} \mid \; n = \dim(\ker(A)), \text{ con } A \in \mathcal{M}_{8,5}(\mathbb{R})\}.$$
2. Dare la definizione di spazio vettoriale ed un esempio di un sottospazio di dimensione 4 di $\mathbb{R}^6$ contenente il vettore $(1, 0, 0, 0, 1, 0)$.
3. Dare la definizione di autovalore e di autovettore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale; dare inoltre un esempio esplicito di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente autovalori 9 e 3 con molteplicità algebrica rispettivamente 1 e 2.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le radici complesse del polinomio
$$(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i)X^4 - (8 + 12i)X$$

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(0, 0, 1, -1), (-1, -1, 0, 0), (1, 0, 0, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni:

$\Phi(0, 0, 1, -1) = (1, -1, 0)$, $\Phi(-1, -1, 0, 0) = (0, 1, -1)$, $\Phi(1, 0, 0, -1) = (1, -2, 1)$, $\Phi(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

(a) Determinare $\Phi(0, -2, 1, 0)$.

(b) Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi}$ associata a Φ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Determinare $\Phi^{-1}(\{(2, -1, -1)\})$.

(d) Determinare tutti i vettori $v \in < (0, 0, 1, -1), (-1, -1, 0, 0), (1, 0, 0, -1) >$ tali che $\Phi(v) = (0, 0, 0)$.

Esercizio 3. Si considerino la matrice
$$A_k = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & k-1 \\ 0 & k-1 & -3 \end{pmatrix}$$
dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è invertibile.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di A_k, gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, siano $U : x-y+z = 0$ e $W =< (-2,-1,4),(0,-1,2) >$.

(a) Determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $W^\perp$.

(b) Sia p_W la proiezione ortogonale su W. Determinare $p_W(0,1,4)$ e $p_W^{-1}(\{(1,-1,2)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino il punto $P = (-1,-1,1)$, la retta $r = P+ < (1,2,1) >$ ed il piano $\pi : 2y + z = 1$.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica del piano π.

(b) Determinare la retta s ortogonale alla retta r, parallela al piano π e passante per il punto P.

(c) Determinare la distanza della retta r dal punto $O = (0,0,0)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

23 giugno 2016

TEORIA

1. Dare la definizione di autovalore e di autovettore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale; dare inoltre un esempio esplicito di un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ avente autovalori -2 e 3 con molteplicità algebrica rispettivamente 3 e 2.
2. Dare la definizione di spazio vettoriale ed un esempio di un sottospazio di dimensione 4 di $\mathbb{R}^5$ contenente il vettore $(1, 0, 1, 0, 0)$.
3. Enunciare il teorema delle dimensioni e determinare il minimo dell'insieme
$$\Sigma = \{n \in \mathbb{Z} \mid \ n = \dim(\ker(A)), \text{ con } A \in \mathcal{M}_{7,4}(\mathbb{R})\}.$$

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le radici complesse del polinomio
$$(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i)X^4 + (6 - 9i)X$$

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(0, 1, 0, -1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, -1, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni:

$\Phi(0, 1, 0, -1) = (1, -1, 0)$, $\Phi(1, 0, 1, 0) = (0, 1, -1)$, $\Phi(0, 0, -1, -1) = (1, -2, 1)$, $\Phi(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

(a) Determinare $\Phi(2, 1, 0, 0)$.

(b) Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi}$ associata a Φ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(c) Determinare $\Phi^{-1}(\{(2, -1, -1)\})$.

(d) Determinare tutti i vettori $v \in <(0, 1, 0, -1), (1, 0, 1, 0), (0, 0, -1, -1)>$ tali che $\Phi(v) = (0, 0, 0)$.

Esercizio 3. Si considerino la matrice
$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & -2k-3 & 0 \\ -2k-3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è invertibile.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di A_k, gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, siano $U : x+y+z = 0$ e $W =< (1, 4, 2), (1, 2, 0) >$.

(a) Determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $W^\perp$.

(b) Sia p_W la proiezione ortogonale su W. Determinare $p_W(-1, 4, 0)$ e $p_W^{-1}(\{(1, 2, -1)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino il punto $P = (1, 1, 1)$, la retta $r = P+ < (-2, 1, -1) >$ ed il piano $\pi : -2x + y = 1$.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica del piano π.

(b) Determinare la retta s ortogonale alla retta r, parallela al piano π e passante per il punto P.

(c) Determinare la distanza della retta r dal punto $O = (0, 0, 0)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.