A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2016

TEORIA

1. Enunciare il teorema spettrale e darne una dimostrazione per matrici 2 per 2.
2. Dare la definizione di sottovarietà lineare di uno spazio affine e dare un esempio di due sottovarietà lineari di dimensione 1 e 2 rispettivamente dello stesso spazio affine che siano parallele e che non si intersechino.
3. Dare la definizione di angolo formato tra due vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale ed esibire un esempio di due vettori di norma 2 di $\mathbb{R}^4$ formanti un angolo di 45 gradi tra di loro.

ESERCIZI

Esercizio 1.

(a) Ricordando che $\overline{z}$ denota il coniugato del numero complesso z, determinare il numero complesso w tale che:

$$\frac{w}{2i} = (1+i\sqrt{3})^4 + \overline{8+i8\sqrt{3}}$$

(b) Denotando ancora con w il numero calcolato al punto (a), determinare tutte le radici complesse del polinomio $X^4 + wX$.

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(0,0,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,1,-1,0)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle base $\mathcal{V}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}_3$ del codominio sia:

$$A_k = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_3,\Phi_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2k & -2 & -2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice $B_k = A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice A_k.

(c) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base di $\ker\Phi_k$ ed una base di $\mathrm{Im}\Phi_k$.

(d) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\Phi_k^{-1}(\{(1,0,k-1)\})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$C_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2-k \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & k & 2-k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1,0,1)$ è autovettore di C_k. Determinare il corrispondente autovalore.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di C_k, gli autovalori di C_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice C_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $U_k =< (1,-1,0),(k-1,k+1,k) >$ dipendente dal parametro reale k.

(a) Determinare, al variare del parametro reale k, una base ortonormale di $U_k^\perp$.

(b) Sia p_{U_k} la proiezione ortogonale su U_k. per $k=1$, determinare $p_{U_1}(2,0,-2)$; e per $k=0$, determinare $p_{U_0}^{-1}(\{(2,-2,0)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino le rette

$$r = (1,0,2) + < (1,-1,0) > \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica della retta s.

(b) Determinare la posizione reciproca delle rette r e s e la distanza $\mathrm{dist}(r,s)$ tra le due rette.

(c) Determinare dei punti $P \in r$ e $Q \in s$ tali che $\mathrm{dist}(r,s) = \mathrm{dist}(P,Q)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2016

TEORIA

1. Dare la definizione di sottovarietà lineare di uno spazio affine e dare un esempio di due sottovarietà lineari di dimensione 2 e 1 rispettivamente dello stesso spazio affine che siano parallele e che non si intersechino.
2. Enunciare il teorema spettrale e darne una dimostrazione per le matrici 2 per 2.
3. Dare la definizione di angolo formato tra due vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale ed esibire un esempio di due vettori di norma 3 di $\mathbb{R}^4$ formanti un angolo di 60 gradi tra di loro.

ESERCIZI

Esercizio 1.

(a) Ricordando che $\overline{z}$ denota il coniugato del numero complesso z, determinare il numero complesso:

$$\frac{w}{\sqrt{3}} = (1 - i\sqrt{3})^4 + \overline{8 - i8\sqrt{3}}$$

(b) Denotando ancora con w il numero calcolato al punto (a), determinare tutte le radici complesse del polinomio $X^4 - wX$.

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(0,0,0,-1), (-1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,-1,1,0)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle base $\mathcal{V}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}_3$ del codominio sia:

$$A_k = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_3,\Phi_k} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2k & 2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice $B_k = A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice A_k.

(c) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base di $\ker\Phi_k$ ed una base di $\mathrm{Im}\Phi_k$.

(d) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\Phi_k^{-1}(\{(1, 0, -k-1)\})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$C_k = \begin{pmatrix} -k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -k-1 & k-1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 0, 1)$ è autovettore di C_k. Determinare il corrispondente autovalore.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di C_k, gli autovalori di C_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice C_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $U_k =< (-1, 0, -1), (1 - k, k, k + 1) >$ dipendente dal parametro reale k.

(a) Determinare, al variare del parametro reale k, una base ortonormale di $U_k^\perp$.

(b) Sia p_{U_k} la proiezione ortogonale su U_k. per $k = 1$, determinare $p_{U_1}(-2, -2, 0)$; e per $k = 0$, determinare $p_{U_0}^{-1}(\{(-2, 0, -2)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino le rette

$$r = (-1, 2, 0) + < (-1, 0, -1) > \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} -x - z + 1 = 0 \\ -x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica della retta s.

(b) Determinare la posizione reciproca delle rette r e s e la distanza $\text{dist}(r, s)$ tra le due rette.

(c) Determinare dei punti $P \in r$ e $Q \in s$ tali che $\text{dist}(r, s) = \text{dist}(P, Q)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2016

TEORIA

1. Dare la definizione di angolo formato tra due vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale ed esibire un esempio di due vettori di norma 4 di $\mathbb{R}^4$ formanti un angolo di 45 gradi tra di loro.
2. Dare la definizione di sottovarietà lineare di uno spazio affine e dare un esempio di due sottovarietà lineari di dimensione 1 e 2 rispettivamente dello stesso spazio affine che siano parallele e che non si intersechino.
3. Enunciare il teorema spettrale e darne una dimostrazione per matrici 2 per 2.

ESERCIZI

Esercizio 1.

(a) Ricordando che $\overline{z}$ denota il coniugato del numero complesso z, determinare il numero complesso:

$$2w\sqrt{3} = -(-1-i\sqrt{3})^4 - \overline{8+i8\sqrt{3}}$$

(b) Denotando ancora con w il numero calcolato al punto (a), determinare tutte le radici complesse del polinomio $X^4 + wX$.

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(0,0,0,-1),(0,0,1,0),(1,-1,0,0),(-1,-1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle base $\mathcal{V}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}_3$ del codominio sia:

$$A_k = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_3,\Phi_k} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2k & -2 & 2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice $B_k = A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice A_k.

(c) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base di $\ker\Phi_k$ ed una base di $\mathrm{Im}\Phi_k$.

(d) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\Phi_k^{-1}(\{(1,0,-k-1)\})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$C_k = \begin{pmatrix} 2-k & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2-k & k \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1,0,1)$ è autovettore di C_k. Determinare il corrispondente autovalore.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di C_k, gli autovalori di C_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice C_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $U_k =< (0,1,1), (-k, k-1, -k-1) >$ dipendente dal parametro reale k.

(a) Determinare, al variare del parametro reale k, una base ortonormale di $U_k^\perp$.

(b) Sia p_{U_k} la proiezione ortogonale su U_k. per $k = -1$, determinare $p_{U_{-1}}(-2,0,2)$; e per $k = 0$, determinare $p_{U_0}^{-1}(\{(0,2,2)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino le rette

$$r = (2,0,1) + < (0,1,1) > \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica della retta s.

(b) Determinare la posizione reciproca delle rette r e s e la distanza $\text{dist}(r,s)$ tra le due rette.

(c) Determinare dei punti $P \in r$ e $Q \in s$ tali che $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(P,Q)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

7 luglio 2016

TEORIA

1. Dare la definizione di angolo formato tra due vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale ed esibire un esempio di due vettori di norma 5 di $\mathbb{R}^4$ formanti un angolo di 60 gradi tra di loro.
2. Enunciare il teorema spettrale e darne una dimostrazione per matrici 2 per 2.
3. Dare la definizione di sottovarietà lineare di uno spazio affine e dare un esempio di due sottovarietà lineari di dimensione 2 e 1 rispettivamente dello stesso spazio affine che siano parallele e che non si intersechino.

ESERCIZI

Esercizio 1.

(a) Ricordando che $\overline{z}$ denota il coniugato del numero complesso z, determinare il numero complesso:

$$\frac{4w}{i\sqrt{3}} = (1 - i\sqrt{3})^4 + \overline{8 - i8\sqrt{3}}$$

(b) Denotando ancora con w il numero calcolato al punto (a), determinare tutte le radici complesse del polinomio $X^4 - wX$.

Esercizio 2. Si consideri la base $\mathcal{V} = \{(0,0,0,-1),(0,1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,1,0)\}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle base $\mathcal{V}$ del dominio ed alla base canonica $\mathcal{E}_3$ del codominio sia:

$$A_k = A_{\mathcal{V},\mathcal{E}_3,\Phi_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2k & -2 & 2 & -2k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice $B_k = A_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3,\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango della matrice A_k.

(c) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base di $\ker\Phi_k$ ed una base di $\mathrm{Im}\Phi_k$.

(d) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\Phi_k^{-1}(\{(1,0,k-1)\})$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$C_k = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & k-3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1-k & k-3 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1,0,1)$ è autovettore di C_k. Determinare il corrispondente autovalore.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di C_k, gli autovalori di C_k e la loro molteplicità algebrica.

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice C_k è diagonalizzabile.

(voltare pagina)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $U_k =< (-1,1,0),(1-k,-k-1,k) >$ dipendente dal parametro reale k.

(a) Determinare, al variare del parametro reale k, una base ortonormale di $U_k^{\perp}$.

(b) Sia p_{U_k} la proiezione ortogonale su U_k. per $k = -1$, determinare $p_{U_{-1}}(0,2,2)$; e per $k = 0$, determinare $p_{U_0}^{-1}(\{(-2,2,0)\})$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale usuale si considerino le rette

$$r = (0,1,-2) + < (-1,1,0) > \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} -x+y+1 = 0 \\ x+y-z-6 = 0 \end{cases}$$

.

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r ed una forma parametrica della retta s.

(b) Determinare la posizione reciproca delle rette r e s e la distanza $\text{dist}(r,s)$ tra le due rette.

(c) Determinare dei punti $P \in r$ e $Q \in s$ tali che $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(P,Q)$.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.