Risoluzione esercizi dell'appello del 7/7/2016 (traccia A)

Esercizio 1:

(a) $$\frac{w}{2i} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 + 16\,\overline{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi + \cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -16\sqrt{3}\,i$$

$$\Rightarrow \quad w = -16\sqrt{3}\,i \cdot 2i = 32\sqrt{3}$$

(b) $$X^4 + wX = X(X^3 + w)$$

0 è una radice del polinomio

le altre radici sono le radici del polinomio $X^3 + w$, dunque per De Moivre sono:

$$x_k = \sqrt[3]{32}\,\sqrt[6]{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$x_0 = \sqrt[3]{4}\,\sqrt[6]{3} \cdot \left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$x_1 = -2\sqrt[3]{4}\,\sqrt[6]{3}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{4}\,\sqrt[6]{3}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

<u>Esercizio 2</u> :

$\mathcal{V} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ con $v_1 = (0,0,0,-1)$, $v_2 = (1,0,0,0)$

$v_3 = (0,1,1,0)$, $v_4 = (0,1,-1,0)$

(a)

si ha

$$(1,0,0,0) = v_2$$

$$(0,1,0,0) = \frac{1}{2}(v_3 + v_4)$$

$$(0,0,1,0) = \frac{1}{2}(v_3 - v_4)$$

$$(0,0,0,1) = -v_1$$

dunque

$$\phi_k(1,0,0,0) = (1,1,2k), \quad \phi_k(0,1,0,0) = (0,-1,-k-1)$$

$$\phi_k(0,0,1,0) = (1,0,k-1), \quad \phi_k(0,0,0,1) = (-1,1,2)$$

dunque

$$A_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_3, \phi_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2k & -k-1 & k-1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2k & -2 & -2k \end{matrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2(k+1) & 0 & -2(k+1) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

si conclude che $\operatorname{rk} A_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalla matrice A_k si trova

$\ker \phi = \langle v_1 - v_3 \, , \, v_2 + v_4 \rangle$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

dunque una base di $\ker \phi_k$, $\forall k \in \mathbb{R}$ è :

$\{ (0,1,1,1) , (1,1,-1,0) \}$

Una base di $\operatorname{Im} \phi_k$, per ogni $k \in \mathbb{R}$ è

$\{ (-1,1,2) , (1,1,2k) \}$

(d) $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2k & k-1 \end{pmatrix} = 2k - 2 - 2(k-1) = 0$

dunque $(1,0,k-1) \in \operatorname{Im} \phi_k \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Inoltre si ha

$\phi_k (0,0,1,0) = (1,0,k-1)$

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{R}$, si ha

$$\phi_k^{-1} (\{ (1,0,k-1) \}) = (0,0,1,0) + \langle (0,1,1,1), (1,1,-1,0) \rangle$$

Esercizio 3:

(a)

$$G_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 2-k \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & k & 2-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2-k \end{pmatrix}$$

dunque $(1,0,1)$ è autovettore di G_k se e solo se $k=0$
in tal caso esso è autovettore di G_k relativo all'autovalore 2.

(b)

$$P_{G_k}(t) = \det\left(G_k - tI_3\right) = \det \begin{pmatrix} k-t & 0 & 2-k \\ 0 & 3-t & 0 \\ 0 & k & 2-k-t \end{pmatrix}$$

$$= -(t-3)(t-k)(t-(2-k))$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $3, k, 2-k$

Si deduce che G_k ha i seguenti autovalori:

per $k=3$:	per $k=-1$
$3 \quad m_a(3)=2$	$3 \quad m_a(3)=2$
$-1 \quad m_a(-1)=1$	$-1 \quad m_a(-1)=1$
per $k=1$	per $k \neq -1, 1, 3$
$3 \quad m_a(3)=1$	$3 \quad m_a(3)=1$
$1 \quad m_a(1)=2$	$k \quad m_a(k)=1$
	$2-k \quad m_a(2-k)=1$

(c) per $k \neq -1, 1, 3$ C_k ha tre autovalori reali distinti dunque è diagonalizzabile

per $k = 3$, studiamo l'autospazio V_3:

$$V_3 = \ker(C_3 - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$m_g(3) = 1 < 2 = m_a(3)$$

dunque C_3 non è diagonalizzabile

per $k = -1$, studiamo l'autospazio V_3:

$$V_3 = \ker(C_{-1} - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \langle (3,0,4) \rangle$$

$$m_g(3) = 1 < 2 = m_a(3)$$

dunque C_{-1} non è diagonalizzabile

per $k = 1$, studiamo l'autospazio V_1:

$$V_1 = \ker(C_1 - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$$

dunque C_1 non è diagonalizzabile

Si conclude che C_k è diagonalizzabile

se e solo se $k \neq -1, 1, 3$.

Esercizio 4:

Per $k=0$, $V_0 = \langle (1,-1,0) \rangle$

Per $k \neq 0$, $\{(1,-1,0), (k-1, k+1, k)\}$ è una base di V_k

inoltre, per $k \neq 0$, $(1,1,1) = \frac{1}{k}\left((1,-1,0) + (k-1, k+1, k)\right)$

da cui si deduce che per $k \neq 0$,

$$V_k = \langle (1,-1,0), (1,1,1) \rangle$$

Troviamo $V_k^{\perp}$ ed una sua base ortonormale:

per $k=0$

$V_0^{\perp} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

~~[illegible]~~ Applicando Gram-Schmidt alla base $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ si ottiene la base ortonormale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}$$

per $k \neq 0$

$V_k^{\perp} = \langle (1,1,-2) \rangle$

una base ortonormale di $V_k^{\perp}$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\}$

(b)

$$p_{V_1}(2,0,-2) = (2,0,-2) - \left((2,0,-2)\cdot\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2)\right)\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2)$$

$$= (2,0,-2) - (1,1,-2) = (1,-1,0)$$

$p^{-1}_{V_0}(\{(2,-2,0)\}) \neq \emptyset$ poiché $(2,-2,0) \in V_0 = \langle(1,-1,0)\rangle$

Quindi

$$p^{-1}_{V_0}(\{(2,-2,0)\}) = (2,-2,0) + \langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$$

Esercizio 5:

(a) $r = (1,0,2) + \langle (1,-1,0) \rangle$

dunque

$$r: \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema si ottiene

$$s = (0,1,5) + \langle (1,1,-2) \rangle$$

(b) le rette r e s non sono parallele poiché $\langle (1,-1,0) \rangle \neq \langle (1,1,-2) \rangle$

Inoltre $(1,0,2) - (0,1,5) = (1,-1,-3)$

si verifica essere lin. ind. dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,1,-2)$

dunque le rette r e s sono sghembe.

$$\text{dist}(r,s) = \frac{|(1,-1,-3) \cdot (1,1,1)|}{\|(1,1,1)\|} = \sqrt{3}$$

dato che $(1,1,1)$ è ortogonale a $(1,-1,0)$ e $(1,1,-2)$

(c) decomponiamo $(1,-1,-3) = (1,0,2) - (0,1,5)$

rispetto alla base $\{(1,-1,0),(1,1,-2),(1,1,1)\}$

$$(1,-1,-3) = (1,-1,0) + (1,1,-2) - (1,1,1)$$

dunque $P = (1,0,2) - (1,-1,0) = (0,1,2) \in r$

e $Q = (0,1,5) + (1,1,-2) = (1,2,3) \in s$

sono tali che $\operatorname{dist}(P,Q) = \| P - Q \| = \| -(1,1,1) \| = \sqrt{3}$

Si ha quindi $\operatorname{dist}(P,Q) = \operatorname{dist}(r,s)$.