**A**

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

**15 giugno 2017**

## TEORIA

1. Enunciare il teorema delle dimensioni ed applicarlo alla dimostrazione del fatto che un endomorfismo è iniettivo se e solo è un isomorfismo.
2. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio $V$ di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che sia ortogonale e diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
3. Dare la definizione di distanza tra sottovarietà lineari dello spazio euclideo ed esibire due rette sghembe $r$ e $s$ tali che la distanza tra $r$ e $s$ sia 3.

## ESERCIZI

**Esercizio 1**

1. *Determinare la forma algebrica del numero complesso* $w = \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$.
2. *Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi* $z$ *tali che* $z^3 = w$.

**Esercizio 2** *Si considerino le applicazioni lineari* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definite nel seguente modo:*

$$f(1,1,0) = (1,1), \quad f(1,0,1) = (1,-1), \quad f(0,1,1) = (0,1),$$

*e*

$$g(1,1) = (1,2,1), \quad g(1,-1) = (-1,1,1).$$

*Sia* $\mathcal{B}$ *la base* $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *di* $\mathbb{R}^3$.

1. *Trovare la matrice* $A_{\mathcal{B},\mathcal{B},g\circ f}$ *associata all'applicazione lineare* $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *nella base* $\mathcal{B}$.
2. *Trovare una base per l'immagine ed una per il nucleo di* $g \circ f$.
3. *Determinare la matrice* $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2,f}$ *associata all'applicazione lineare* $f$ *rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.*
4. *Determinare una base di Ker*$(f)$ *ed una base di Im*$(f)$.
5. *Completare la base trovata di Ker*$(f)$ *ad una base di Ker*$(g \circ f)$.

**Esercizio 3** *Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x + y + 3z &= k; \\ kx + 2y + z &= 2 \\ x + y - kz &= 0 \end{cases}$$

1. *Determinare per quali valori del parametro reale* $k$ *il sistema ammette una ed una sola soluzione.*
2. *Determinare per quali valori del parametro reale* $k$ *il sistema non ammette soluzioni.*
3. *Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare per i valori del parametro reale* $k$ *per i quali il sistema lineare ammette infinite soluzioni.*

*(voltare pagina)*

**Esercizio 4** *Sia data, al variare del parametro reale k, la matrice*

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare molteplicità algebrica e molteplicità geometrica della matrice $A_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
2. *Si dica per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
3. *Per $k = 0$, si determini una base ortonormale per ogni autospazio di $A_0$. Si dica inoltre per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è ortogonalmente diagonalizzabile.*

**Esercizio 5** *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

1. *Trovare equazioni parametriche per $r_1$ ed $r_2$.*
2. *Determinare la loro posizione reciproca.*
3. *Calcolare la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*
4. *Trovare, se esiste, la retta $s$ ortogonale sia a $r_1$ che a $r_2$ e che interseca sia $r_1$ che $r_2$ in un punto.*
5. *Poniamo $P_1 := s \cap r_1$ e $P_2 := s \cap r_2$. Calcolare la distanza tra $P_1$ e $P_2$. Verificare che tale distanza è esattamente la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*

---

**Regole d'esame**

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

**B**

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

**15 giugno 2017**

## TEORIA

1. Enunciare il teorema delle dimensioni ed applicarlo alla dimostrazione del fatto che un endomorfismo è iniettivo se e solo è un isomorfismo.
2. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio $V$ di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che sia ortogonale e diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
3. Dare la definizione di distanza tra sottovarietà lineari dello spazio euclideo ed esibire due rette sghembe $r$ e $s$ tali che la distanza tra $r$ e $s$ sia 3.

## ESERCIZI

**Esercizio 6**

1. *Determinare la forma algebrica del numero complesso* $w = \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$.
2. *Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi $z$ tali che* $z^3 = w$.

**Esercizio 7** *Si considerino le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definite nel seguente modo:*

$$f(1,1,0) = (1,1), \quad f(1,0,1) = (1,-1), \quad f(0,1,1) = (0,1),$$

*e*

$$g(1,1) = (1,2,1), \quad g(1,-1) = (-1,1,1).$$

*Sia $\mathcal{B}$ la base $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.*

1. *Trovare la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B},g\circ f}$ associata all'applicazione lineare $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$.*
2. *Trovare una base per l'immagine ed una per il nucleo di $g \circ f$.*
3. *Determinare la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2,f}$ associata all'applicazione lineare $f$ rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.*
4. *Determinare una base di $Ker(f)$ ed una base di $Im(f)$.*
5. *Completare la base trovata di $Ker(f)$ ad una base di $Ker(g \circ f)$.*

**Esercizio 8** *Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x + y + 3z &= k; \\ kx + 2y + z &= 2 \\ x + y - kz &= 0 \end{cases}$$

1. *Determinare per quali valori del parametro reale $k$ il sistema ammette una ed una sola soluzione.*
2. *Determinare per quali valori del parametro reale $k$ il sistema non ammette soluzioni.*
3. *Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare per i valori del parametro reale $k$ per i quali il sistema lineare ammette infinite soluzioni.*

*(voltare pagina)*

**Esercizio 9** *Sia data, al variare del parametro reale $k$, la matrice*

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare molteplicità algebrica e molteplicità geometrica della matrice $A_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
2. *Si dica per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
3. *Per $k = 0$, si determini una base ortonormale per ogni autospazio di $A_0$. Si dica inoltre per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è ortogonalmente diagonalizzabile.*

**Esercizio 10** *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

1. *Trovare equazioni parametriche per $r_1$ ed $r_2$.*
2. *Determinare la loro posizione reciproca.*
3. *Calcolare la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*
4. *Trovare, se esiste, la retta $s$ ortogonale sia a $r_1$ che a $r_2$ e che interseca sia $r_1$ che $r_2$ in un punto.*
5. *Poniamo $P_1 := s \cap r_1$ e $P_2 := s \cap r_2$. Calcolare la distanza tra $P_1$ e $P_2$. Verificare che tale distanza è esattamente la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*

---

**Regole d'esame**

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

**C**

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

**15 giugno 2017**

## TEORIA

1. Enunciare il teorema delle dimensioni ed applicarlo alla dimostrazione del fatto che un endomorfismo è iniettivo se e solo è un isomorfismo.
2. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio $V$ di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che sia ortogonale e diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
3. Dare la definizione di distanza tra sottovarietà lineari dello spazio euclideo ed esibire due rette sghembe $r$ e $s$ tali che la distanza tra $r$ e $s$ sia 3.

## ESERCIZI

**Esercizio 11**

1. *Determinare la forma algebrica del numero complesso* $w = \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$.
2. *Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi* $z$ *tali che* $z^3 = w$.

**Esercizio 12** *Si considerino le applicazioni lineari* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definite nel seguente modo:*

$$f(1,1,0) = (1,1), \quad f(1,0,1) = (1,-1), \quad f(0,1,1) = (0,1),$$

*e*

$$g(1,1) = (1,2,1), \quad g(1,-1) = (-1,1,1).$$

*Sia* $\mathcal{B}$ *la base* $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *di* $\mathbb{R}^3$.

1. *Trovare la matrice* $A_{\mathcal{B},\mathcal{B},g\circ f}$ *associata all'applicazione lineare* $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *nella base* $\mathcal{B}$.
2. *Trovare una base per l'immagine ed una per il nucleo di* $g \circ f$.
3. *Determinare la matrice* $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2,f}$ *associata all'applicazione lineare* $f$ *rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.*
4. *Determinare una base di* $Ker(f)$ *ed una base di* $Im(f)$.
5. *Completare la base trovata di* $Ker(f)$ *ad una base di* $Ker(g \circ f)$.

**Esercizio 13** *Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x + y + 3z &= k; \\ kx + 2y + z &= 2 \\ x + y - kz &= 0 \end{cases}$$

1. *Determinare per quali valori del parametro reale* $k$ *il sistema ammette una ed una sola soluzione.*
2. *Determinare per quali valori del parametro reale* $k$ *il sistema non ammette soluzioni.*
3. *Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare per i valori del parametro reale* $k$ *per i quali il sistema lineare ammette infinite soluzioni.*

*(voltare pagina)*

**Esercizio 14** *Sia data, al variare del parametro reale k, la matrice*

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare molteplicità algebrica e molteplicità geometrica della matrice $A_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.*

2. *Si dica per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*

3. *Per $k = 0$, si determini una base ortonormale per ogni autospazio di $A_0$. Si dica inoltre per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è ortogonalmente diagonalizzabile.*

**Esercizio 15** *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

1. *Trovare equazioni parametriche per $r_1$ ed $r_2$.*

2. *Determinare la loro posizione reciproca.*

3. *Calcolare la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*

4. *Trovare, se esiste, la retta $s$ ortogonale sia a $r_1$ che a $r_2$ e che interseca sia $r_1$ che $r_2$ in un punto.*

5. *Poniamo $P_1 := s \cap r_1$ e $P_2 := s \cap r_2$. Calcolare la distanza tra $P_1$ e $P_2$. Verificare che tale distanza è esattamente la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*

---

**Regole d'esame**

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

**D**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

# FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA – CANALE DISPARI
DOCENTE: FRANCESCO ESPOSITO

**15 giugno 2017**

## TEORIA

1. Enunciare il teorema delle dimensioni ed applicarlo alla dimostrazione del fatto che un endomorfismo è iniettivo se e solo è un isomorfismo.
2. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio $V$ di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che sia ortogonale e diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
3. Dare la definizione di distanza tra sottovarietà lineari dello spazio euclideo ed esibire due rette sghembe $r$ e $s$ tali che la distanza tra $r$ e $s$ sia 3.

## ESERCIZI

**Esercizio 16**

1. *Determinare la forma algebrica del numero complesso* $w = \left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$.
2. *Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi* $z$ *tali che* $z^3 = w$.

**Esercizio 17** *Si considerino le applicazioni lineari* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definite nel seguente modo:*

$$f(1,1,0) = (1,1), \quad f(1,0,1) = (1,-1), \quad f(0,1,1) = (0,1),$$

*e*

$$g(1,1) = (1,2,1), \quad g(1,-1) = (-1,1,1).$$

*Sia* $\mathcal{B}$ *la base* $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ *di* $\mathbb{R}^3$.

1. *Trovare la matrice* $A_{\mathcal{B},\mathcal{B},g\circ f}$ *associata all'applicazione lineare* $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *nella base* $\mathcal{B}$.
2. *Trovare una base per l'immagine ed una per il nucleo di* $g \circ f$.
3. *Determinare la matrice* $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2,f}$ *associata all'applicazione lineare* $f$ *rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio.*
4. *Determinare una base di Ker*$(f)$ *ed una base di Im*$(f)$.
5. *Completare la base trovata di Ker*$(f)$ *ad una base di Ker*$(g \circ f)$.

**Esercizio 18** *Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + 3z &= k; \\ kx + 2y + z &= 2 \\ x + y - kz &= 0 \end{cases}$$

1. *Determinare per quali valori del parametro reale* $k$ *il sistema ammette una ed una sola soluzione.*
2. *Determinare per quali valori del parametro reale* $k$ *il sistema non ammette soluzioni.*
3. *Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare per i valori del parametro reale* $k$ *per i quali il sistema lineare ammette infinite soluzioni.*

*(voltare pagina)*

**Esercizio 19** *Sia data, al variare del parametro reale $k$, la matrice*

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Determinare molteplicità algebrica e molteplicità geometrica della matrice $A_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
2. *Si dica per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
3. *Per $k = 0$, si determini una base ortonormale per ogni autospazio di $A_0$. Si dica inoltre per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ è ortogonalmente diagonalizzabile.*

**Esercizio 20** *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

1. *Trovare equazioni parametriche per $r_1$ ed $r_2$.*
2. *Determinare la loro posizione reciproca.*
3. *Calcolare la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*
4. *Trovare, se esiste, la retta $s$ ortogonale sia a $r_1$ che a $r_2$ e che interseca sia $r_1$ che $r_2$ in un punto.*
5. *Poniamo $P_1 := s \cap r_1$ e $P_2 := s \cap r_2$. Calcolare la distanza tra $P_1$ e $P_2$. Verificare che tale distanza è esattamente la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.*

---

**Regole d'esame**

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.