Correzione appello del 15/06/2017 (tema A)

Esercizio 1:

1. $$w=\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4=\left(\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}\right)^4$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)^4$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos\left(\pi+\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pi+\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2. $|w|=\frac{1}{4}$, $\arg w=\frac{\pi}{3}$

Dunque per le formule di de Moivre

$z^3=w$ ha le seguenti tre soluzioni:

$$z_k=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\qquad k=0,1,2$$

Esercizio 2:

1. $$g \circ f(1,1,0) = g(f(1,1,0)) = g(1,1) = (1,2,1)$$

$$g \circ f(1,0,1) = g(f(1,0,1)) = g(1,-1) = (-1,1,1)$$

$$g \circ f(0,1,1) = g(f(0,1,1)) = g(0,1) = g\left(\frac{(1,1)-(1,-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2,1,0)$$

Inoltre $(1,2,1) = (1,1,0) + (0,1,1)$,

$$(-1,1,1) = \frac{1}{2}\left(-(1,1,0) - (1,0,1) + 3(0,1,1)\right),$$

$$\frac{1}{2}(2,1,0) = \frac{1}{4}\left(3(1,1,0) + (1,0,1) - (0,1,1)\right)$$

Dunque segue che

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},g\circ f} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 3/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

2. Questa matrice ha rango 2, dunque $\{(1,2,1), (-1,1,1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(g\circ f)$.

Inoltre $g\circ f\left((1,1,0) - (1,0,1) - 2(0,1,1)\right) = (0,0,0)$,

quindi, poiché $\dim \ker(g\circ f) = 1$, si ha che

$\{(0,-1,-3)\}$ è una base di $\ker(g\circ f)$.

3. Si ha

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1)$$

$$(0,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1)$$

$$(0,0,1) = -\frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1)$$

dunque

$$f(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) - \frac{1}{2}(0,1) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f(0,1,0) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1) + \frac{1}{2}(0,1) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$f(0,0,1) = -\frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1) + \frac{1}{2}(0,1) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

da cui segue che

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ dunque una base di $\operatorname{Im} f$ è ad esempio $\mathcal{E}_2$.

$\ker f = \langle (0,1,3) \rangle$, dunque una base di $\ker f$ è ad esempio $\{(0,1,3)\}$.

4. La base $\{(0,1,3), (1,0,0), (0,1,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ è una base di $\mathbb{R}^3$ ottenuta completando la suddetta base di $\ker f$.

Esercizio 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ k & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -k & 0 \end{array}\right)$$

riduciamo in forma a scala

$$\xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-k\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2-k & 1-3k & 2-k^2 \\ 0 & 0 & -k-3 & -k \end{pmatrix}$$

se $k=-3$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad rk(A) \neq rk(A|\underline{b})$$

dunque il sistema non ha soluzioni per $k=-3$

se $k=2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

il sistema è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ -5z=-2 \end{cases}$$

Le infinite soluzioni di questo sistema sono

$$\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) + \langle(1,-1,0)\rangle$$

1. per $k \neq -3, 2$

il sistema ammette una ed una sola soluzione.

2. per $k = -3$ il sistema non ammette soluzioni

3. per $k = 2$ le soluzioni del sistema sono

$$\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) + \langle (1, -1, 0) \rangle$$

Esercizio 4:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico di A_k:

$$P_{A_k}(t) = \det\left(A_k - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & k \\ 0 & k & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$= (1-t)\left((2-t)^2 - k^2\right) =$$

$$= (1-t)\left(t^2 - 4t + 4 - k^2\right)$$

$$= (1-t)\left(t-(2+k)\right)\left(t-(2-k)\right)$$

radici di $P_{A_k}(t)$: $1, 2+k, 2-k$

1. se $k \neq -1, 0, 1$, A_k ha 3 autovalori distinti di molteplicità algebrica e molteplicità geometrica 1: $1, 2+k, 2-k$.

per $k = 0$

autovalori:

1 molt. alg. 1, molt. geom. 1

2 molt. alg. 2, molt. geom. 2

per $k=-1$

autovalori:

1 molt. alg. 2, molt. geom. 1

3 molt. alg. 1, molt. geom. 1

$$rk\left(A_{-1}-I_3\right)=rk\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=2$$

per $k=1$

autovalori:

1 molt. alg. 2, molt. geom. 1

3 molt. alg. 1, molt. geom. 1

$$rk\left(A_1-I_3\right)=rk\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=2$$

2. da quanto appena visto si deduce che

A_k è diagonalizzabile per $k\neq 1,-1$.

3. autospazi di A_0:

$$V_1=\ker\left(A_0-I_3\right)=\ker\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\langle(1,-1,0)\rangle$$

una base ortonormale di V_1 è $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right\}$.

$$V_2=\ker\left(A_0-2I_3\right)=\ker\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$$

una base ortonormale di V_2 è $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

3. Poiché non c'è alcun valore di k per il quale A_k sia simmetrica, segue che A_k non è mai ortogonalmente diagonalizzabile.

Esercizio 5:

1. Risolvendo i sistemi si ha

$$r_1 = (1,0,0) + \langle (1,1,1) \rangle$$

$$r_2 = (0,-1,0) + \langle (1,2,1) \rangle$$

2. r_1 e r_2 non sono parallele

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \frac{|(1,1,0) \cdot (1,1,1) \times (1,2,1)|}{\|(1,1,1) \times (1,2,1)\|}$$

$$= \frac{|(1,1,0) \cdot (-1,0,1)|}{\|(-1,0,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

le rette r_1 e r_2 sono sghembe

3. la distanza tra r_1 e r_2 è $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $t = \pi_1 \cap \pi_2$

$$\pi_1 = (1,0,0) + \langle (1,1,1), (1,0,-1) \rangle \; : \quad x - 2y + z = 1$$

$$\pi_2 = (0,-1,0) + \langle (1,2,1), (1,0,-1) \rangle \; : \quad x - y + z = 1$$

$$t = (1,0,0) + \langle (1,0,-1) \rangle$$

$$P_1 = r_1 \cap t = r_1 \cap \pi_2 = (1,0,0)$$

$$P_2 = r_2 \cap t = r_2 \cap \pi_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{dist}(P_1, P_2) = \| P_2 - P_1 \| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$