A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

4 luglio 2017

TEORIA

1. Enunciare la formula di Grassmann ed applicarla alla determinazione delle possibili dimensioni dell'intersezione di due sottospazi di dimensione 6 in $\mathbb{R}^8$.
2. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di determinante -1 che sia ortogonale e simmetrica è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
3. Enunciare il terorema di Rouché-Capelli ed applicarlo allo studio della posizione reciproca di un piano ed una retta nello spazio euclideo tridimensionale.

ESERCIZI

Esercizio 1.

1. Determinare la forma algebrica del numero complesso $w = \frac{1}{(1+2i)^2-1}$.
2. Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi z tali che $z^3 = w$.

Esercizio 2. Si considerino il sottospazio $U =< (1,-1,2,0),(1,1,0,-2),(0,1,-1,-1) >$ ed il sottospazio $V =< (1,1,-1,0),(1,1,0,1) >$ di $\mathbb{R}^4$.

1. Determinare una base di U ed una base di $V^\perp$.
2. Determinare una base di $U \cap (V^\perp)$ ed una base di $U + (V^\perp)$.
3. Determinare una base ortonormale di V e determinare la proiezione ortogonale su V del vettore $v = (2,1,-2,-3)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}$ è

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_k} = A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.
2. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la controimmagine $\Phi_k^{-1}(1,2k,k)$.
3. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B},\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(0,0,-1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ nel codominio.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$v_1 = (0, 0, -1), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 1, 1)$$

e sia $\Psi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\Psi_h(v_1) = v_1 + (1-h)v_2, \quad \Psi_h(v_2) = hv_3 - v_2, \quad \Psi_h(v_3) = hv_2 - v_3.$$

1. Si verifichi che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si determini la matrice $B_h = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Psi_h}$ associata all'endomorfismo Ψ_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, autovalori e autospazi dell'endomorfismo Ψ_h.
3. Determinare per quali valori di k la matrice B_h è diagonalizzabile; per tali valori, determinare una matrice diagonale D_h ed una matrice invertibile H_h tali che si abbia $D_h = H_h^{-1} B_h H_h$.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti punti dello spazio euclideo tridimensionale:

$$P_1 = (3, 1, 0), P_2 = (1, 1, 1), P_3 = (3, 2, 1), P_4 = (0, -2, 3), P_5 = (6, -2, 0).$$

1. Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π passante per i punti P_1, P_2, P_3.
2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r passante per i punti P_4, P_5.
3. Determinare la posizione reciproca di π e r e calcolarne la distanza.
4. Determinare tutti i punti di π che hanno distanza minima dalla retta r.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

4 luglio 2017

TEORIA

---

1. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di determinante -1 che sia ortogonale e simmetrica è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
2. Enunciare la formula di Grassmann ed applicarla alla determinazione delle possibili dimensioni dell'intersezione di due sottospazi di dimensione 6 in $\mathbb{R}^8$.
3. Enunciare il terorema di Rouché-Capelli ed applicarlo allo studio della posizione reciproca di un piano ed una retta nello spazio euclideo tridimensionale.

ESERCIZI

Esercizio 1.

1. Determinare la forma algebrica del numero complesso $w = \frac{3}{(-2+i)^2+1}$.
2. Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi z tali che $z^5 = w$.

Esercizio 2. Si considerino il sottospazio $U =< (-1, 2, -1, 0), (-1, 0, 1, -2), (0, -1, 1, -1) >$ ed il sottospazio $V =< (-1, -1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1) >$ di $\mathbb{R}^4$.

1. Determinare una base di U ed una base di $V^\perp$.
2. Determinare una base di $U \cap (V^\perp)$ ed una base di $U + (V^\perp)$.
3. Determinare una base ortonormale di V e determinare la proiezione ortogonale su V del vettore $v = (-2, -2, 1, -3)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}$ è

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_k} = A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1-k^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.
2. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la controimmagine $\Phi_k^{-1}(-1, k, 2k)$.
3. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B},\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(0, -1, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, 1)\}$ nel codominio.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$v_1 = (0, -1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (-1, 1, 1)$$

e sia $\Psi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\Psi_h(v_1) = v_1 + (1 + h)v_2, \quad \Psi_h(v_2) = -hv_3 - v_2, \quad \Psi_h(v_3) = -hv_2 - v_3.$$

1. Si verifichi che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si determini la matrice $B_h = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Psi_h}$ associata all'endomorfismo Ψ_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, autovalori e autospazi dell'endomorfismo Ψ_h.
3. Determinare per quali valori di k la matrice B_h è diagonalizzabile; per tali valori, determinare una matrice diagonale D_h ed una matrice invertibile H_h tali che si abbia $D_h = H_h^{-1} B_h H_h$.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti punti dello spazio euclideo tridimensionale:

$$P_1 = (-3, 0, 1), P_2 = (-1, 1, 1), P_3 = (-3, 1, 2), P_4 = (0, 3, -2), P_5 = (-6, 0, -2).$$

1. Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π passante per i punti P_1, P_2, P_3.
2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r passante per i punti P_4, P_5.
3. Determinare la posizione reciproca di π e r e calcolarne la distanza.
4. Determinare tutti i punti di π che hanno distanza minima dalla retta r.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

4 luglio 2017

TEORIA

---

1. Enunciare la formula di Grassmann ed applicarla alla determinazione delle possibili dimensioni dell'intersezione di due sottospazi di dimensione 6 in $\mathbb{R}^8$.
2. Enunciare il terorema di Rouché-Capelli ed applicarlo allo studio della posizione reciproca di un piano ed una retta nello spazio euclideo tridimensionale.
3. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di determinante -1 che sia ortogonale e simmetrica è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZI

Esercizio 1.

1. Determinare la forma algebrica del numero complesso $w = \frac{1}{(1-2i)^2-1}$.
2. Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = w$.

Esercizio 2. Si considerino il sottospazio $U =< (2,1,1,0),(0,-1,1,-2),(-1,-1,0,-1) >$ ed il sottospazio $V =< (-1,-1,1,0),(0,-1,1,1) >$ di $\mathbb{R}^4$.

1. Determinare una base di U ed una base di $V^\perp$.
2. Determinare una base di $U \cap (V^\perp)$ ed una base di $U + (V^\perp)$.
3. Determinare una base ortonormale di V e determinare la proiezione ortogonale su V del vettore $v = (-2,-1,2,-3)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}$ è

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_k} = A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.
2. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la controimmagine $\Phi_k^{-1}(k,-2k,1)$.
3. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B},\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(-1,0,0),(1,-1,0),(1,-1,1)\}$ nel codominio.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$v_1 = (-1, 0, 0), \quad v_2 = (1, -1, 0), \quad v_3 = (1, -1, 1)$$

e sia $\Psi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\Psi_h(v_1) = v_1 + (1-h)v_2, \quad \Psi_h(v_2) = hv_3 - v_2, \quad \Psi_h(v_3) = hv_2 - v_3.$$

1. Si verifichi che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si determini la matrice $B_h = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Psi_h}$ associata all'endomorfismo Ψ_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, autovalori e autospazi dell'endomorfismo Ψ_h.
3. Determinare per quali valori di k la matrice B_h è diagonalizzabile; per tali valori, determinare una matrice diagonale D_h ed una matrice invertibile H_h tali che si abbia $D_h = H_h^{-1} B_h H_h$.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti punti dello spazio euclideo tridimensionale:

$$P_1 = (0, -1, 3), P_2 = (1, -1, 1), P_3 = (1, -2, 3), P_4 = (3, 2, 0), P_5 = (0, 2, 6).$$

1. Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π passante per i punti P_1, P_2, P_3.
2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r passante per i punti P_4, P_5.
3. Determinare la posizione reciproca di π e r e calcolarne la distanza.
4. Determinare tutti i punti di π che hanno distanza minima dalla retta r.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria Meccanica – CANALE DISPARI
Docente: Francesco Esposito

4 luglio 2017

TEORIA

1. Enunciare il terorema di Rouché-Capelli ed applicarlo allo studio della posizione reciproca di un piano ed una retta nello spazio euclideo tridimensionale.
2. Enunciare la formula di Grassmann ed applicarla alla determinazione delle possibili dimensioni dell'intersezione di due sottospazi di dimensione 6 in $\mathbb{R}^8$.
3. Dare la definizione di matrice ortogonale e di simmetria ortogonale di asse un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di determinante -1 che sia ortogonale e simmetrica è la matrice associata ad una simmetria ortogonale $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZI

Esercizio 1.

1. Determinare la forma algebrica del numero complesso $w = \frac{1}{(2-i)^2+1}$.
2. Determinare la forma trigonometrica di tutti i numeri complessi z tali che $z^3 = w$.

Esercizio 2. Si considerino il sottospazio $U =< (-1, 1, -2, 0), (1, 1, 0, -2), (1, 0, 1, -1) >$ ed il sottospazio $V =< (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) >$ di $\mathbb{R}^4$.

1. Determinare una base di U ed una base di $V^\perp$.
2. Determinare una base di $U \cap (V^\perp)$ ed una base di $U + (V^\perp)$.
3. Determinare una base ortonormale di V e determinare la proiezione ortogonale su V del vettore $v = (1, 2, 2, -3)$.

Esercizio 3. Sia $\Phi_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, la cui matrice rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ di $\mathbb{R}$ è

$$A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Phi_k} = A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-k^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, una base del nucleo ed una base dell'immagine di Φ_k.
2. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la controimmagine $\Phi_k^{-1}(2k, 1, -k)$.
3. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice $A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{B},\Phi_k}$ associata a Φ_k rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (1, 0, -1), (1, 1, -1)\}$ nel codominio.

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si considerino i vettori

$$v_1 = (0, 0, 1), \quad v_2 = (1, 0, -1), \quad v_3 = (1, 1, -1)$$

e sia $\Psi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\Psi_h(v_1) = v_1 + (1-h)v_2, \quad \Psi_h(v_2) = hv_3 - v_2, \quad \Psi_h(v_3) = hv_2 - v_3.$$

1. Si verifichi che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si determini la matrice $B_h = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3,\Psi_h}$ associata all'endomorfismo Ψ_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, autovalori e autospazi dell'endomorfismo Ψ_h.
3. Determinare per quali valori di k la matrice B_h è diagonalizzabile; per tali valori, determinare una matrice diagonale D_h ed una matrice invertibile H_h tali che si abbia $D_h = H_h^{-1} B_h H_h$.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti punti dello spazio euclideo tridimensionale:

$$P_1 = (1, 3, 0), P_2 = (1, 1, -1), P_3 = (2, 3, -1), P_4 = (-2, 0, -3), P_5 = (-2, 6, 0).$$

1. Determinare forma parametrica e forma cartesiana del piano π passante per i punti P_1, P_2, P_3.
2. Determinare forma parametrica e forma cartesiana della retta r passante per i punti P_4, P_5.
3. Determinare la posizione reciproca di π e r e calcolarne la distanza.
4. Determinare tutti i punti di π che hanno distanza minima dalla retta r.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, ecc..).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di **3 ore**.
- È possibile ritirarsi: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.