

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

TEMA A

- (1) Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale V allo spazio vettoriale W .
- (a) (1pt) Se $\dim V = \dim W$ allora f è un isomorfismo.
 - (b) (2pt) Se $\text{Ker}(f) = \{0\}$, allora $\dim V \leq \dim W$.
 - (c) (2pt) Se $V = W = \mathbb{R}^3$, allora $\text{Im}(f)$ è ortogonale a $\text{Ker}(f)$.
- (2) Sia data l'applicazione lineare $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è la seguente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -9 \\ 3 & -1 & -6 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) (1pt) Si determini una base di $\text{Im}\Phi$.
 - (b) (2pt) Si determini una base per $(\text{Im}\Phi)^\perp$.
 - (c) (2pt) Si determini una base ortonormale di $\text{Ker}\Phi$.
 - (d) (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 0, 0, 6)$ su $\text{Ker}\Phi$.
 - (e) (2pt) Sia data la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 3, 1)\}$ di \mathbb{R}^4 . Si determini la matrice $\mathcal{A}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\Phi)$ associata all'applicazione Φ rispetto alla base \mathcal{B} .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto P di coordinate $(2, 1, 0)$, la retta r la cui forma parametrica è $r = (0, 1, 1) + \langle (1, 0, 2) \rangle$, e la retta s di equazioni cartesiane $x + y - z = 2$, $2x + 3y - 2z = 8$.
- (a) (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per P e contenente r .
 - (b) (3pt) Si determini la posizione reciproca di π ed s e se ne calcoli la distanza.
 - (c) (2pt) Si determini la posizione reciproca di s ed r .
- (4) Sia $z = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $w = \frac{z-2i}{(z+i)} + \frac{-1+4i}{(\bar{z}-i)}$.
- (a) (2pt) Si determinino w e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $z = 2 + i$.
 - (b) (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero w sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale α , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) (3pt) Si dica per quali valori di α la matrice A è diagonalizzabile su \mathbb{R} . E su \mathbb{C} ?
- (b) (1pt) Si dica per quali valori di α la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (c) (1pt) Si determini una base di autovettori per $\alpha = 1$.

(6) Si considerino i sottospazi $U = \langle (1, 2, 0, 2), (0, 1, 0, 1) \rangle$ e

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} x - y - z + w = 0, \\ 2x + 3y - 2z - 3w = 0 \end{array} \right\}$$

di \mathbb{R}^4 .

(a) (3pt) Determinare una base di $U \cap W$ ed una base di $U + W$.

(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di \mathbb{R}^4 ? Perché?

Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

TEMA B

- (1) Sia $g: U \rightarrow W$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale U allo spazio vettoriale W .
- (2pt) Se $U = W = \mathbb{R}^4$, allora $\text{Im}(g)$ è ortogonale a $\text{Ker}(g)$.
 - (1pt) Se $\dim U = \dim W$ allora g è un isomorfismo.
 - (2pt) Se $\text{Ker}(g) = \{0\}$, allora $\dim W \geq \dim U$.
- (2) Sia data l'applicazione lineare $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

- (1pt) Si determini una base di $\text{Im}\Phi$.
 - (2pt) Si determini una base per $(\text{Im}\Phi)^\perp$.
 - (2pt) Si determini una base ortonormale di $\text{Ker}\Phi$.
 - (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (0, 1, 6, 0)$ su $\text{Ker}\Phi$.
 - (2pt) Sia data la base $\mathcal{C} = \{(0, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 3)\}$ di \mathbb{R}^4 . Si determini la matrice $\mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\Phi)$ associata all'applicazione Φ rispetto alla base \mathcal{C} .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto Q di coordinate $(-2, 0, 1)$, la retta s la cui forma parametrica è $s = (0, 1, 1) + \langle (-1, 2, 0) \rangle$, e la retta r di equazioni cartesiane $x + y - z = -2$, $2x + 2y - 3z = -8$.
- (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano β passante per Q e contenente s .
 - (3pt) Si determini la posizione reciproca di β ed r e se ne calcoli la distanza.
 - (2pt) Si determini la posizione reciproca di s ed r .
- (4) Sia $x = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $y = \frac{\bar{x}+2i}{(\bar{x}-i)} + \frac{-1-4i}{(x+i)}$.
- (2pt) Si determinino y e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $x = 2 + i$.
 - (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero y sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale β , la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

- (3pt) Si dica per quali valori di β la matrice B è diagonalizzabile su \mathbb{R} . E su \mathbb{C} ?
- (1pt) Si dica per quali valori di β la matrice B è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (1pt) Si determini una base di autovettori per $\beta = -1$.

(6) Si considerino i sottospazi $V = \langle (2, 1, 2, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle$ e

$$U = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} -x + y + z - w = 0, \\ 3x + 2y - 3z - 2w = 0 \end{array} \right\}$$

di \mathbb{R}^4 .

(a) (3pt) Determinare una base di $U \cap V$ ed una base di $U + V$.

(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di \mathbb{R}^4 ? Perché?

Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

TEMA C

- (1) Sia $f: V \rightarrow U$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale V allo spazio vettoriale U .
- (2pt) Se $\text{Ker}(f) = \{0\}$, allora $\dim U \geq \dim V$.
 - (2pt) Se $U = V = \mathbb{R}^4$, allora $\text{Im}(f)$ è ortogonale a $\text{Ker}(f)$.
 - (1pt) Se $\dim V = \dim U$ allora f è un isomorfismo.
- (2) Sia data l'applicazione lineare $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & -9 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1pt) Si determini una base di $\text{Im}\Phi$.
 - (2pt) Si determini una base per $(\text{Im}\Phi)^\perp$.
 - (2pt) Si determini una base ortonormale di $\text{Ker}\Phi$.
 - (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (0, 6, 1, 0)$ su $\text{Ker}\Phi$.
 - (2pt) Sia data la base $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0)\}$ di \mathbb{R}^4 . Si determini la matrice $\mathcal{A}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\Phi)$ associata all'applicazione Φ rispetto alla base \mathcal{B} .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto P di coordinate $(0, -1, 2)$, la retta s la cui forma parametrica è $s = (1, -1, 0) + \langle (2, 0, 1) \rangle$, e la retta r di equazioni cartesiane $x + y - z = -2$, $2x + 3y - 2z = -8$.
- (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano γ passante per P e contenente s .
 - (3pt) Si determini la posizione reciproca di γ ed r e se ne calcoli la distanza.
 - (2pt) Si determini la posizione reciproca di r ed s .
- (4) Sia $w = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $z = \frac{-1+4i}{(-i+w)} - \frac{2i-w}{(i+w)}$.
- (2pt) Si determinino z e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $w = 2 + i$.
 - (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero z sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale γ , la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 4\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3pt) Si dica per quali valori di γ la matrice C è diagonalizzabile su \mathbb{R} . E su \mathbb{C} ?
- (1pt) Si dica per quali valori di γ la matrice C è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (1pt) Si determini una base di autovettori per $\gamma = 1$.

(6) Si considerino i sottospazi $W = \langle (0, 2, 1, 2), (0, 1, 0, 1) \rangle$ e

$$V = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} -x + y + z - w = 0, \\ -2x - 3y + 2z + 3w = 0 \end{array} \right\}$$

di \mathbb{R}^4 .

- (a) (3pt) Determinare una base di $V \cap W$ ed una base di $V + W$.
 (b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di \mathbb{R}^4 ? Perché?

Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

TEMA D

- (1) Sia $g: W \rightarrow U$ un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale W allo spazio vettoriale U .
- (2pt) Se $\text{Ker}(g) = \{0\}$, allora $\dim W \leq \dim U$.
 - (1pt) Se $\dim W = \dim U$ allora g è un isomorfismo.
 - (2pt) Se $U = W = \mathbb{R}^3$, allora $\text{Im}(g)$ è ortogonale a $\text{Ker}(g)$.
- (2) Sia data l'applicazione lineare $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 & -2 \\ 7 & -6 & -1 & 3 \\ -9 & 8 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1pt) Si determini una base di $\text{Im}\Phi$.
 - (2pt) Si determini una base per $(\text{Im}\Phi)^\perp$.
 - (2pt) Si determini una base ortonormale di $\text{Ker}\Phi$.
 - (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (6, 0, 0, 1)$ su $\text{Ker}\Phi$.
 - (2pt) Sia data la base $\mathcal{B} = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 0), (1, 3, 0, 0)\}$ di \mathbb{R}^4 . Si determini la matrice $\mathcal{A}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\Phi)$ associata all'applicazione Φ rispetto alla base \mathcal{B} .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto Q di coordinate $(1, 2, 0)$, la retta r la cui forma parametrica è $r| = (1, 0, -1) + \langle (0, 1, -2) \rangle$, e la retta s di equazioni cartesiane $x + y + z = 2$, $3x + 2y + 2z = 8$.
- (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano α passante per Q e contenente r .
 - (3pt) Si determini la posizione reciproca di α ed s e se ne calcoli la distanza.
 - (2pt) Si determini la posizione reciproca di s ed r .
- (4) Sia $y = a + ib$ un numero complesso, con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $x = \frac{-1-4i}{(y+i)} - \frac{2i+\bar{y}}{(i-\bar{y})}$.
- (2pt) Si determinino x e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui $y = 2 + i$.
 - (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare a e b affinché il numero x sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale δ , la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -\delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\delta \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3pt) Si dica per quali valori di δ la matrice D è diagonalizzabile su \mathbb{R} . E su \mathbb{C} ?
- (1pt) Si dica per quali valori di δ la matrice D è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (1pt) Si determini una base di autovettori per $\delta = -1$.

(6) Si considerino i sottospazi $W = \langle (2, 0, 2, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$ e

$$U = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} x - y - z + w = 0, \\ -3x - 2y + 3z + 2w = 0 \end{array} \right\}$$

di \mathbb{R}^4 .

(a) (3pt) Determinare una base di $U \cap W$ ed una base di $U + W$.

(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di \mathbb{R}^4 ? Perché?

Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.