

# Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

## Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

### TEMA A

- (1) Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale  $V$  allo spazio vettoriale  $W$ .
- (a) (1pt) Se  $\dim V = \dim W$  allora  $f$  è un isomorfismo.
  - (b) (2pt) Se  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , allora  $\dim V \leq \dim W$ .
  - (c) (2pt) Se  $V = W = \mathbb{R}^3$ , allora  $\text{Im}(f)$  è ortogonale a  $\text{Ker}(f)$ .
- (2) Sia data l'applicazione lineare  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è la seguente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 8 & -9 \\ 3 & -1 & -6 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) (1pt) Si determini una base di  $\text{Im}\Phi$ .
  - (b) (2pt) Si determini una base per  $(\text{Im}\Phi)^\perp$ .
  - (c) (2pt) Si determini una base ortonormale di  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (d) (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore  $v = (1, 0, 0, 6)$  su  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (e) (2pt) Sia data la base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 3, 1)\}$  di  $\mathbb{R}^4$ . Si determini la matrice  $\mathcal{A}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\Phi)$  associata all'applicazione  $\Phi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto  $P$  di coordinate  $(2, 1, 0)$ , la retta  $r$  la cui forma parametrica è  $r = (0, 1, 1) + \langle (1, 0, 2) \rangle$ , e la retta  $s$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = 2$ ,  $2x + 3y - 2z = 8$ .
- (a) (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $P$  e contenente  $r$ .
  - (b) (3pt) Si determini la posizione reciproca di  $\pi$  ed  $s$  e se ne calcoli la distanza.
  - (c) (2pt) Si determini la posizione reciproca di  $s$  ed  $r$ .
- (4) Sia  $z = a + ib$  un numero complesso, con  $a, b \in \mathbb{R}$  e sia  $w = \frac{z-2i}{(z+i)} + \frac{-1+4i}{(\bar{z}-i)}$ .
- (a) (2pt) Si determinino  $w$  e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui  $z = 2 + i$ .
  - (b) (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare  $a$  e  $b$  affinché il numero  $w$  sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale  $\alpha$ , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) (3pt) Si dica per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . E su  $\mathbb{C}$ ?
- (b) (1pt) Si dica per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (c) (1pt) Si determini una base di autovettori per  $\alpha = 1$ .

(6) Si considerino i sottospazi  $U = \langle (1, 2, 0, 2), (0, 1, 0, 1) \rangle$  e

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} x - y - z + w = 0, \\ 2x + 3y - 2z - 3w = 0 \end{array} \right\}$$

di  $\mathbb{R}^4$ .

(a) (3pt) Determinare una base di  $U \cap W$  ed una base di  $U + W$ .

(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di  $\mathbb{R}^4$ ? Perché?

### Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

# Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

## TEMA B

- (1) Sia  $g: U \rightarrow W$  un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale  $U$  allo spazio vettoriale  $W$ .
- (2pt) Se  $U = W = \mathbb{R}^4$ , allora  $\text{Im}(g)$  è ortogonale a  $\text{Ker}(g)$ .
  - (1pt) Se  $\dim U = \dim W$  allora  $g$  è un isomorfismo.
  - (2pt) Se  $\text{Ker}(g) = \{0\}$ , allora  $\dim W \geq \dim U$ .
- (2) Sia data l'applicazione lineare  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

- (1pt) Si determini una base di  $\text{Im}\Phi$ .
  - (2pt) Si determini una base per  $(\text{Im}\Phi)^\perp$ .
  - (2pt) Si determini una base ortonormale di  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore  $v = (0, 1, 6, 0)$  su  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (2pt) Sia data la base  $\mathcal{C} = \{(0, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 3)\}$  di  $\mathbb{R}^4$ . Si determini la matrice  $\mathcal{A}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\Phi)$  associata all'applicazione  $\Phi$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto  $Q$  di coordinate  $(-2, 0, 1)$ , la retta  $s$  la cui forma parametrica è  $s = (0, 1, 1) + \langle (-1, 2, 0) \rangle$ , e la retta  $r$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -2$ ,  $2x + 2y - 3z = -8$ .
- (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\beta$  passante per  $Q$  e contenente  $s$ .
  - (3pt) Si determini la posizione reciproca di  $\beta$  ed  $r$  e se ne calcoli la distanza.
  - (2pt) Si determini la posizione reciproca di  $s$  ed  $r$ .
- (4) Sia  $x = a + ib$  un numero complesso, con  $a, b \in \mathbb{R}$  e sia  $y = \frac{\bar{x}+2i}{(\bar{x}-i)} + \frac{-1-4i}{(x+i)}$ .
- (2pt) Si determinino  $y$  e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui  $x = 2 + i$ .
  - (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare  $a$  e  $b$  affinché il numero  $y$  sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale  $\beta$ , la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

- (3pt) Si dica per quali valori di  $\beta$  la matrice  $B$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . E su  $\mathbb{C}$ ?
- (1pt) Si dica per quali valori di  $\beta$  la matrice  $B$  è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (1pt) Si determini una base di autovettori per  $\beta = -1$ .

(6) Si considerino i sottospazi  $V = \langle (2, 1, 2, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle$  e

$$U = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} -x + y + z - w = 0, \\ 3x + 2y - 3z - 2w = 0 \end{array} \right\}$$

di  $\mathbb{R}^4$ .

(a) (3pt) Determinare una base di  $U \cap V$  ed una base di  $U + V$ .

(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di  $\mathbb{R}^4$ ? Perché?

### Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

# Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

## Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

### TEMA C

- (1) Sia  $f: V \rightarrow U$  un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale  $V$  allo spazio vettoriale  $U$ .
- (2pt) Se  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ , allora  $\dim U \geq \dim V$ .
  - (2pt) Se  $U = V = \mathbb{R}^4$ , allora  $\text{Im}(f)$  è ortogonale a  $\text{Ker}(f)$ .
  - (1pt) Se  $\dim V = \dim U$  allora  $f$  è un isomorfismo.
- (2) Sia data l'applicazione lineare  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & -9 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1pt) Si determini una base di  $\text{Im}\Phi$ .
  - (2pt) Si determini una base per  $(\text{Im}\Phi)^\perp$ .
  - (2pt) Si determini una base ortonormale di  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore  $v = (0, 6, 1, 0)$  su  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (2pt) Sia data la base  $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0)\}$  di  $\mathbb{R}^4$ . Si determini la matrice  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\Phi)$  associata all'applicazione  $\Phi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto  $P$  di coordinate  $(0, -1, 2)$ , la retta  $s$  la cui forma parametrica è  $s = (1, -1, 0) + \langle (2, 0, 1) \rangle$ , e la retta  $r$  di equazioni cartesiane  $x + y - z = -2$ ,  $2x + 3y - 2z = -8$ .
- (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\gamma$  passante per  $P$  e contenente  $s$ .
  - (3pt) Si determini la posizione reciproca di  $\gamma$  ed  $r$  e se ne calcoli la distanza.
  - (2pt) Si determini la posizione reciproca di  $r$  ed  $s$ .
- (4) Sia  $w = a + ib$  un numero complesso, con  $a, b \in \mathbb{R}$  e sia  $z = \frac{-1+4i}{(-i+w)} - \frac{2i-w}{(i+w)}$ .
- (2pt) Si determinino  $z$  e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui  $w = 2 + i$ .
  - (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare  $a$  e  $b$  affinché il numero  $z$  sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale  $\gamma$ , la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 4\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3pt) Si dica per quali valori di  $\gamma$  la matrice  $C$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . E su  $\mathbb{C}$ ?
- (1pt) Si dica per quali valori di  $\gamma$  la matrice  $C$  è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (1pt) Si determini una base di autovettori per  $\gamma = 1$ .

(6) Si considerino i sottospazi  $W = \langle (0, 2, 1, 2), (0, 1, 0, 1) \rangle$  e

$$V = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} -x + y + z - w = 0, \\ -2x - 3y + 2z + 3w = 0 \end{array} \right\}$$

di  $\mathbb{R}^4$ .

(a) (3pt) Determinare una base di  $V \cap W$  ed una base di  $V + W$ .

(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di  $\mathbb{R}^4$ ? Perché?

### Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

# Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

## Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2017

### TEMA D

- (1) Sia  $g: W \rightarrow U$  un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale  $W$  allo spazio vettoriale  $U$ .
- (2pt) Se  $\text{Ker}(g) = \{0\}$ , allora  $\dim W \leq \dim U$ .
  - (1pt) Se  $\dim W = \dim U$  allora  $g$  è un isomorfismo.
  - (2pt) Se  $U = W = \mathbb{R}^3$ , allora  $\text{Im}(g)$  è ortogonale a  $\text{Ker}(g)$ .
- (2) Sia data l'applicazione lineare  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio è

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 & -2 \\ 7 & -6 & -1 & 3 \\ -9 & 8 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1pt) Si determini una base di  $\text{Im}\Phi$ .
  - (2pt) Si determini una base per  $(\text{Im}\Phi)^\perp$ .
  - (2pt) Si determini una base ortonormale di  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (1pt) Si determini la proiezione ortogonale del vettore  $v = (6, 0, 0, 1)$  su  $\text{Ker}\Phi$ .
  - (2pt) Sia data la base  $\mathcal{B} = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 0), (1, 3, 0, 0)\}$  di  $\mathbb{R}^4$ . Si determini la matrice  $\mathcal{A}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\Phi)$  associata all'applicazione  $\Phi$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .
- (3) Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto  $Q$  di coordinate  $(1, 2, 0)$ , la retta  $r$  la cui forma parametrica è  $r| = (1, 0, -1) + \langle (0, 1, -2) \rangle$ , e la retta  $s$  di equazioni cartesiane  $x + y + z = 2$ ,  $3x + 2y + 2z = 8$ .
- (2pt) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\alpha$  passante per  $Q$  e contenente  $r$ .
  - (3pt) Si determini la posizione reciproca di  $\alpha$  ed  $s$  e se ne calcoli la distanza.
  - (2pt) Si determini la posizione reciproca di  $s$  ed  $r$ .
- (4) Sia  $y = a + ib$  un numero complesso, con  $a, b \in \mathbb{R}$  e sia  $x = \frac{-1-4i}{(y+i)} - \frac{2i+\bar{y}}{(i-\bar{y})}$ .
- (2pt) Si determinino  $x$  e le sue radici cubiche complesse nel caso in cui  $y = 2 + i$ .
  - (2pt) Si determinino le condizioni che devono soddisfare  $a$  e  $b$  affinché il numero  $x$  sia reale.

- (5) Sia data, al variare del parametro reale  $\delta$ , la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -\delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\delta \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3pt) Si dica per quali valori di  $\delta$  la matrice  $D$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . E su  $\mathbb{C}$ ?
- (1pt) Si dica per quali valori di  $\delta$  la matrice  $D$  è ortogonalmente diagonalizzabile.
- (1pt) Si determini una base di autovettori per  $\delta = -1$ .

(6) Si considerino i sottospazi  $W = \langle (2, 0, 2, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$  e

$$U = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{l} x - y - z + w = 0, \\ -3x - 2y + 3z + 2w = 0 \end{array} \right\}$$

di  $\mathbb{R}^4$ .

(a) (3pt) Determinare una base di  $U \cap W$  ed una base di  $U + W$ .

(b) (1pt) L'unione delle due basi trovate al punto (a) è una base di  $\mathbb{R}^4$ ? Perché?

### Regole d'esame

- La partecipazione alla presente prova di studenti che hanno già superato l'esame comporta la rinuncia automatica al voto precedentemente conseguito.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON è consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni, tablet etc di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.