Risoluzione scritto del 6/6/18 (tema A)

Esercizio 1:

(a) Falso: Il numero complesso 0 non ammette inverso, infatti $0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}$.

(b) Vero: Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, allora la matrice $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, con $b_{ij} = -a_{ij}$ è l'opposta della matrice A. Infatti si ha

$$A + B = O_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}.$$

(c) Falso: Dal teorema delle dimensioni segue che l'equivalenza tra suriettività ed iniettività è valida solo per applicazioni lineari $\phi : V \to W$ per le quali $\dim V = \dim W$.

Infatti si ha:

ϕ è iniettiva $\Longleftrightarrow \dim(\ker\phi) = 0$

ϕ è suriettiva $\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Im}\,\phi) = \dim(W)$

da cui, per il teorema delle dimensioni,

ϕ è suriettiva $\Longleftrightarrow \dim(V) - \dim(\ker\phi) = \dim W$

Esercizio 2:

(a) Si ha che $\mathcal{B}_\alpha$ è una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Segue che $\mathcal{B}_\alpha$ è una base di $\mathbb{R}^3$ per $\alpha \neq -2/3$.

(b) Si ha, per la formula di cambiamento di base,

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \phi_\alpha} = A_{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{E}_3, id_{\mathbb{R}^3}} \, A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{B}_\alpha, \phi_\alpha}$$

dunque (per $\alpha \neq -2/3$)

$$A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3, \phi_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) (per $\alpha \neq -2/3$) si ha

$$\operatorname{Im}\phi_\alpha = \langle (1,3,\alpha), (1,1,0) \rangle \quad e \quad \ker\phi_\alpha = \langle (0,0,1) \rangle$$

$\dim \operatorname{Im}\phi_\alpha = 2$ e $\dim \ker\phi_\alpha = 1$.

(d) $\phi_\alpha^{-1}(1,-1,1)$ è vuoto, per il teorema di Rouché–Capelli, se e solo se $rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} < rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ossia se e solo se

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Si conclude che $\phi_\alpha^{-1}(1,-1,1)$ è vuoto se e solo se $\alpha \neq -1$

(d) $\phi_\alpha^{-1}(1,-1,1)$ è non vuoto se e solo se $\alpha = -1$.

Si ha inoltre $(1,-1,1) = (-1,-3,1) + (2,2,0)$

ossia $(1,-1,1) = \phi_1(-1,0,0) + 2\phi_1(0,1,0) = \phi_1(-1,2,0)$

Dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, si ha

$$\phi_1^{-1}(1,-1,1) = (-1,2,0) + \ker\phi_1 = (-1,2,0) + \langle(0,0,1)\rangle$$

Esercizio 3:

(a) Una base di U è $\{(1,-1,0,1),(-1,0,1,1)\}$ dato che questi vettori generano U e sono lin. ind.

Sia $ax+by+cz+dw=0$ la generica equazione lineare omogenea nelle variabili x,y,z,w.

Imponendo le condizioni di essere verificate da tutti i vettori di U dà il sistema:

$$\begin{cases} a-b+d=0 \\ -a+c+d=0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono le seguenti equazioni per U:

$$U: \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z+w=0 \end{cases}$$

(b) $W = U^{\perp} = \langle (1,1,1,0),(0,1,-1,1) \rangle$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{(1,1,1,0),(0,1,-1,1)\}$ di W, si ottiene

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)$$

$$u_2' = (0,1,-1,1) - \left((0,1,-1,\phi)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)$$

$$= (0,1,-1,\phi)$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1)$$

Dunque una base ortonormale di W è

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1)\right\}$$

(c) Si ha

$$\pi_W(2,0,1,1) = \left((2,0,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) +$$

$$+ \left((2,0,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1)$$

$$= \frac{3}{3}(1,1,1,0) = (1,1,1,0)$$

(d) Poiché $(2,0,1,1) \notin W = \operatorname{Im}\pi_W$ si ha che

$\pi_W^{-1}(\alpha(2,0,1,1))$ è non vuoto se e solo se $\alpha = 0$,

dunque segue che $\pi_W^{-1}(V) = \pi_W^{-1}(0,0,0,0) = \ker\pi_W = U$.

Esercizio 4:

(a) Il polinomio caratteristico di f_k è:

$$P_k(t) = \det(A_k - tI_3) = -(t+3)^2(t-4)$$

Dunque gli autovalori di f_k sono:

-3 con molteplicità algebrica 2

4 con molteplicità algebrica 1

(b) Gli autospazi di f_k sono:

$$V_{-3} = \ker\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{cases} \langle (1,0,0) \rangle & \text{se } k \neq 0 \\ \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

$$V_4 = \ker\begin{pmatrix} -7 & k & 0 \\ 0 & -7 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (k(k-1), 7(k-1), 49) \rangle$$

Dunque -3 è di molteplicità geometrica 1 se $k \neq 0$ e 2 se $k = 0$

e 4 è di molteplicità geometrica 1.

(c) Per quanto visto

f_k è diagonalizzabile solo per $k=0$

ed una base di autovettori è

$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,-7)\}$

(d) f_k è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se A_k è simmetrica, dunque per nessun k.

Esercizio 5 : $\boxed{8}$

(a) $$w = (7+i)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) - \left(1+4i-2\sqrt{3}\,i\right)$$

$$= \frac{1}{2}(6+8i) - \left(1+4i-2\sqrt{3}\,i\right)$$

$$= 2+2\sqrt{3}\,i = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

(b) $X^5 + wX = X(X^4 + w) = 0$

Le soluzioni complesse di questa equazione sono dunque lo zero e le quattro radici quarte di $-w$.

Si conclude che $X^5 + wX = 0$ ha cinque soluzioni complesse distinte.

(c) $X^5 - 2wX = X(X^4 - 2w) = 0$

soluzioni: $0,\ \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right)$

per $k = 0,1,2,3$.

Esercizio 6:

(a) Risolvendo il sistema

$$r: \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

si ottiene $\quad r = (1,0,0) + \langle (2,-1,-1) \rangle$

Eliminando il parametro dalla forma parametrica

$s = (-1,2,0) + \langle (8,-4,-4) \rangle$ si ottiene

$$s: \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

(b) r e s sono parallele distinte, poiché $\langle (2,-1,-1) \rangle$ è uguale a $\langle (8,-4,-4) \rangle$ e $(-1,2,0) \notin r$.

Il piano $\pi': 2x - y - z - 2 = 0$ è ortogonale a r e s ed inoltre $\pi' \cap r = (1,0,0)$ e $\pi' \cap s = (1,1,-1)$

Dunque $\operatorname{dist}(r,s) = \operatorname{dist}((1,0,0),(1,1,-1)) = \sqrt{2}$

(c) Poiché $s \subset \pi$, π sarà parallelo sia a r che a s.

Dunque $\operatorname{dist}(r,\pi) = \operatorname{dist}((1,0,0),\pi)$

Affinché si abbia $\operatorname{dist}(r,\pi) = \operatorname{dist}(r,s)$, si deve avere $((1,0,0) - (1,1,-1))$ ortogonale a π, dunque

$\pi: \ y - z = 2.$