Risoluzione dello scritto del 27/06/2018 (tema A)

Esercizio 1:

1. $$w = \frac{9+7i}{3-i} - \frac{2+11i}{1-2i} = \frac{(9+7i)(3+i)}{10} - \frac{(2+11i)(1+2i)}{5}$$

$$= \frac{20+30i}{10} - \frac{-20+15i}{5} = 6$$

2. Le radici puramente immaginarie di $X^8 - w$ sono del tipo $z = ib$ con $b \in \mathbb{R}$ e $z^8 = w$.

Dunque si ottiene $(ib)^8 = 6$ ossia $b^8 = 6$, da cui si conclude che $z = \pm i\sqrt[8]{6}$.

Esercizio 2:

1. La matrice di $f + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ è

$$A_k = A_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3, f+k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}} = A + kI_3 = \begin{pmatrix} 3+k & 0 & 0 \\ 0 & 2+k & 1 \\ 0 & 1 & 2+k \end{pmatrix}$$

$f + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ non è invertibile se e solo se $\det A_k = 0$,

Si ha $\det A_k = (3+k)^2(1+k)$.

Si conclude che $f + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ non è invertibile per $k = -1, -3$.

2.

$\boxed{k = -1}$

$$\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (0,1,-1) \rangle$$

$$\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (2,0,0), (0,1,1) \rangle : \ y - z = 0$$

$\boxed{k = -3}$

$$\ker(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$$

$$\mathrm{Im}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (0,1,-1) \rangle : \ \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

3. Dalla definizione di matrice associata ad una applicazione lineare rispetto ad una data scelta di basi, segue che

$$f(v_1) = (3,1,2), \quad f(v_2) = (3,5,4), \quad f(v_3) = (0,-2,-4)$$

ossia

$$v_1 = A^{-1}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad \text{(se consideriamo } v_1, v_2, v_3 \text{ come vettori colonna)}$$

$$v_2 = A^{-1}\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$$

$$v_3 = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

Calcolando l'inversa di A si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 6 & -3\\0 & -3 & 6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Quindi

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$$

Esercizio 3:

1. $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la simmetria di asse W e direzione $W^\perp$

dunque, per definizione

$$\sigma(u+v) = u - v \quad \text{se } u \in W \text{ e } v \in W^\perp$$

da ciò segue che gli autovalori di σ sono ± 1,

W è l'autospazio di σ relativo all'autovalore 1

e $W^\perp$ è l'autospazio di σ relativo all'autovalore -1.

Determiniamo una base ortonormale di W ed una base ortonormale di $W^\perp$.

Ortonormalizziamo la base $\{(1,-2,-1),(2,1,3)\}$ di W:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)$$

$$u_2' = (2,1,3) - \left((2,1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1) =$$

$$= (2,1,3) + \frac{3}{6}(1,-2,-1) = \frac{1}{2}(5,0,5) = \frac{5}{2}(1,0,1)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

Si conclude che $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right\}$ è una base ortonormale di W.

Inoltre si determina che $W^\perp = \langle (1,1,-1) \rangle$

dunque $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right\}$ è una base ortonormale di $W^\perp$.

2. Si ha, in maniera unica,

$$(0,-1,5) = u + v \quad \text{con} \quad u \in W \text{ e } v \in W^\perp.$$

Inoltre

$$v = \left((0,-1,5) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = (-2,-2,2)$$

e

$$u = (0,-1,5) - (-2,-2,2) = (2,1,3)$$

Quindi

$$\sigma((0,-1,5)) = \sigma((2,1,3) + (-2,-2,2)) = (2,1,3) + (2,2,-2)$$

$$= (4,3,-1)$$

3. v si scrive in maniera unica come

$v = u_1 + u_2$ con $u_1 \in W$ e $u_2 \in W^\perp$

dunque, poiché $\sigma(v) = u_1 - u_2$, si ha

$(-2,4,2) = v + \sigma(v) = u_1 + u_2 + u_1 - u_2 = 2u_1$

ossia $u_1 = (-1,2,1)$

Inoltre $u_2 = \alpha\,(1,1,-1)$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$

Quindi

$$v = (-1,2,1) + \alpha\,(1,1,-1)$$

$$\sigma(v) = (-1,2,1) - \alpha\,(1,1,-1)$$

e $v \cdot \sigma(v) = (-1,2,1)\cdot(-1,2,1) - \alpha^2\,(1,1,-1)\cdot(1,1,-1)$

poiché $(-1,2,1)$ e $(1,1,-1)$ sono ortogonali.

Da cui segue che

$$v \cdot \sigma(v) = 0 \iff 6 - 3\alpha^2 = 0$$

Si conclude che ci sono due possibili v:

$$v = (-1,2,1) + \sqrt{2}\,(1,1,-1) \quad \text{e} \quad v = (-1,2,1) - \sqrt{2}\,(1,1,-1).$$

Esercizio 4:

1. Determiniamo il polinomio caratteristico di A_k.

$$P(t) = \det(A_k - tI_3) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1-k & k+1-t & 0 \\ 1-k & 0 & k+1-t \end{pmatrix}$$

$$= \left((k+1)-t\right)\left[(1-t)(k+1-t)+k-1\right] =$$

$$= \left((k+1)-t\right)\left[t^2-(k+2)t+2k\right]$$

$$= -\left(t-(k+1)\right)(t-2)(t-k)$$

Le radici di $P(t)$ sono $2, k, k+1$

Discutiamo i vari casi nei quali alcune di queste coincidono tra loro.

$\boxed{k=2}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

autovalori di A_2:

2 con molt. alg. 2, 3 con molt. alg. 1

molteplicità geometrica:

$$m_g(2) = 3 - rk(A_2 - 2I_2) = 3 - rk\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$m_g(3) = 3 - rk\,(A_2 - 3I_3) = 3 - rk\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{k=1}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

autovalori di A_1:

1 con molt. alg. 1, 2 con molt. alg. 2

molteplicità geometrica:

$$m_g(1) = 3 - rk\,(A_1 - I_3) = 3 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$m_g(2) = 3 - rk\,(A_1 - 2I_3) = 3 - rk\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

caso generico $k \neq 1, 2$:

autovalori: $2, k, k+1$

poiché sono 3 autovalori distinti,

per ognuno si ha molt. alg. = molt. geom. = 1.

2. Da quanto visto al punto precedente segue che A_k è diagonalizzabile per $k \neq 2$.

3. Determiniamo gli autospazi di A_k.

$\boxed{k \neq 1,2}$

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1-k & k-1 & 0 \\ 1-k & 0 & k-1 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1) \rangle$$

$$V_k = \ker \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ 1-k & 1 & 0 \\ 1-k & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1, k-1, k-1) \rangle$$

$$V_{k+1} = \ker \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1-k & 0 & 0 \\ 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle$$

In questo caso ci sono autovettori tra loro ortogonali solo per $k = \frac{1}{2}$.

$\boxed{k=1}$ Si ha $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e si verifica che $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ sono autovettori di A_1 ortogonali tra loro.

$\boxed{k=2}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

autospazi:

$V_2 = \ker(A_2 - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1) \rangle$

$V_3 = \ker(A_2 - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle$

in questo caso non ci sono autovettori tra loro ortogonali.

Si conclude che autovettori di A_k ortogonali tra loro esistono se e solo se $k = 1/2, 1$.

Esercizio 5:

1. Risolvendo i sistemi lineari che definiscono r_1 e r_2 si ottiene

$$r_1 = (1,0,0) + \langle (1,1,2) \rangle$$

$$r_2 = (0,-1,0) + \langle (1,2,1) \rangle$$

Le rette non sono quindi parallele. Determiniamo la distanza tra r_1 e r_2:

$$dist(r_1, r_2) = \frac{|((1,0,0)-(0,-1,0)) \cdot ((1,1,2) \times (1,2,1))|}{\|(1,1,2) \times (1,2,1)\|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}}$$

2. $\pi_1 = (1,0,0) + \langle (1,1,2), (-3,1,1) \rangle \; : \; x + 7y - 4z - 1 = 0$

$\pi_2 = (0,-1,0) + \langle (1,2,1), (-3,1,1) \rangle \; : \; x - 4y + 7z - 4 = 0$

π_1 e π_2 sono incidenti poiché ortogonali tra loro.

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \left(\frac{32}{11}, \frac{-3}{11}, 0\right) + \langle (-3,1,1) \rangle$$

I punti di π_1 che distano $\sqrt{\frac{3}{22}}$ da π_2 sono i punti di π_1 che distano $\sqrt{\frac{3}{22}}$ da $\pi_1 \cap \pi_2$

Dunque sono i punti delle due rette

$$s = \left(\left(\frac{32}{11}, \frac{-3}{11}, 0 \right) + \alpha (1,1,2) \right) + \langle (-3,1,1) \rangle$$

$$t = \left(\left(\frac{32}{11}, \frac{-3}{11}, 0 \right) - \alpha (1,1,2) \right) + \langle (-3,1,1) \rangle$$

con $\alpha = \frac{1}{\sqrt{44}}$

In alternativa, sapendo che i punti costituiscono due rette parallele di direzione $\langle (-3,1,1) \rangle$

Si trovano tutti i punti del tipo $(1,0,0) + a(1,1,2) = P_a$ che distano $\sqrt{\frac{3}{22}}$ da π_2:

$$\text{dist}(P_a, \pi_2) = \frac{|-3+11a|}{\sqrt{66}} = \sqrt{\frac{3}{22}}$$

ovvero $|-3+11a| = \sqrt{9} = 3$

Questa uguaglianza è soddisfatta per $a = 0, 6/11$.