Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole DISPARI

19 settembre 2018

TEMA A

(1) Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
  (a) (1pt) Se $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è un endomorfismo con $f \circ f = 2I$, allora f è iniettiva.
  (b) (2pt) Se $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha un autovalore reale, allora ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.

(2) Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale. Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere ed un controesempio nel caso in cui non lo siano.
  (a) (1pt) Se U, V sono sottospazi tali che $U \cap V^\perp = \{0\}$ allora $U \subset V$.
  (b) (2pt) Sia U un sottospazio e $\mathcal{B}$ una sua base. Se $v \notin U^\perp$ allora esiste un vettore di $\mathcal{B}$ che non è ortogonale a v.

(3) Sia data, al variare del parametro reale t, la matrice

$$A_t = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t+1 & t+1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1-t & 0 \\ t^2-t & 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

e sia $L_{A_t}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato.
  (a) (4pt) Si dica per quali valori di t la matrice A_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
  (b) (2pt) Per $t = 0$ si trovino, se possibile, una matrice ortogonale P ed una diagonale D tali che $P^T A_0 P = D$.
  (c) (2pt) Si calcolino nucleo ed immagine di L_{A_t} al variare di t.

(4) Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$, la retta r di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

e la retta s dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$, di equazione parametrica:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a \\ -a \\ 0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} a \\ 2 \\ a \end{vmatrix}, \text{ per } t \in \mathbb{R}$$

  (a) (2pt) Trovare una forma parametrica per r ed equazioni cartesiane per s_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.
  (b) (2pt) Determinare la posizione reciproca tra la retta r e la retta s_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.
  (c) (1pt) Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ le rette r ed s_a sono ortogonali.
  (d) (2pt) Sia $a = 1$. Determinare la distanza tra la retta r e la retta s_1.

(5) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $U = \operatorname{span}\left(\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \right)$.
Si consideri ia proiezione ortogonale p_U su U come un endomorfismo $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
  (a) (3pt) Determinare una base ortonormale di autovettori di p_U.

(b) (1pt) Determinare $p_U\left(\begin{vmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix}\right)$.

(c) (2pt) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ per i quali $v + p_U(v) = \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ (suggerimento: si ricorda che $p_U \circ p_U = p_U$).

(6) Sia dato il numero complesso $z = \frac{4i}{1-i} + i\overline{(2-6i)} + \frac{(2+i)(6+2i)}{1+2i}$.
   (a) (2pt) Si determinino modulo ed argomento di z.
   (b) (2pt) Si determinino le radici cubiche di z.

Regole d'esame

- Non si può sostenere la prova se si ha già superato l'esame e non si è provveduto a rifiutare il voto precedente.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON à consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito avere con se' libri, appunti, telefoni, tablet etc di alcun tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole PARI

19 settembre 2018

TEMA B

(1) Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
   (a) (1pt) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo con $g \circ g = 3I$, allora g è suriettivo.
   (b) (2pt) Se $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha un autovalore reale, allora ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.

(2) Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale. Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere ed un controesempio nel caso in cui non lo siano.
   (a) (1pt) Se W, V sono sottospazi tali che $W \cap V^\perp = \{0\}$ allora $V \subset W$.
   (b) (2pt) Sia W un sottospazio e $\mathcal{B}$ una sua base. Se $x \notin W^\perp$ allora esiste un vettore di $\mathcal{B}$ che non è ortogonale ad x.

(3) Sia data, al variare del parametro reale s, la matrice

$$B_s = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 & s^2-s \\ 0 & s+1 & s+1 & 0 \\ 0 & 1-s & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix}$$

e sia $L_{B_s}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato.
   (a) (4pt) Si dica per quali valori di t la matrice B_s è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   (b) (2pt) Per $s = 0$ si trovino, se possibile, una matrice ortogonale P ed una diagonale D tali che $P^T B_0 P = D$.
   (c) (2pt) Si calcolino nucleo ed immagine di L_{B_s} al variare di s.

(4) Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$, la retta r di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

e la retta s_b dipendente da un parametro $b \in \mathbb{R}$, di equazione parametrica:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-1 \\ 0 \\ -b \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} -b \\ b \\ 2 \end{vmatrix}, \text{ per } t \in \mathbb{R}$$

   (a) (2pt) Trovare una forma parametrica per r ed equazioni cartesiane per s_b al variare di $b \in \mathbb{R}$.
   (b) (2pt) Determinare la posizione reciproca tra la retta r e la retta s_b al variare di $b \in \mathbb{R}$.
   (c) (1pt) Determinare per quali valori del parametro $b \in \mathbb{R}$ le rette r ed s_b sono ortogonali.
   (d) (2pt) Sia $b = 1$. Determinare la distanza tra la retta r e la retta s_1.

(5) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $V = \operatorname{span}\left(\begin{vmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right)$.
Si consideri ia proiezione ortogonale p_V su V come un endomorfismo $p_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   (a) (3pt) Determinare una base ortonormale di autovettori di p_V.

(b) (1pt) Determinare $p_V\left(\begin{vmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}\right)$.

(c) (2pt) Determinare tutti i vettori $x \in \mathbb{R}^3$ per i quali $x + p_V(x) = \begin{vmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix}$ (suggerimento: si ricorda che $p_V \circ p_V = p_V$).

(6) Sia dato il numero complesso $w = \frac{-4i}{1+i} - i(\overline{2+6i}) + \frac{(2-i)(6-2i)}{1-2i}$.

(a) (2pt) Si determinino modulo ed argomento di w.

(b) (2pt) Si determinino le radici cubiche di w.

Regole d'esame

- Non si può sostenere la prova se si ha già superato l'esame e non si è provveduto a rifiutare il voto precedente.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON à consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito avere con se' libri, appunti, telefoni, tablet etc di alcun tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole PARI

19 settembre 2018

TEMA C

(1) Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
  (a) (1pt) Se $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è un endomorfismo con $g \circ g = -I$, allora g è biettivo.
  (b) (2pt) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha un autovalore reale, allora ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.

(2) Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale. Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere ed un controesempio nel caso in cui non lo siano.
  (a) (1pt) Se W, U sono sottospazi tali che $W \cap U^{\perp} = \{0\}$ allora $U \subset W$.
  (b) (2pt) Sia V un sottospazio e $\mathcal{B}$ una sua base. Se $z \notin V^{\perp}$ allora esiste un vettore di $\mathcal{B}$ che non è ortogonale a z.

(3) Sia data, al variare del parametro reale s, la matrice

$$A_s = \begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 1-s & 0 \\ 0 & 1+s & 1-s & 0 \\ s^2-s & 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix}$$

e sia $L_{A_s}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato.
  (a) (4pt) Si dica per quali valori di s la matrice A_s è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
  (b) (2pt) Per $s = 0$ si trovino, se possibile, una matrice ortogonale P ed una diagonale D tali che $P^T A_0 P = D$.
  (c) (2pt) Si calcolino nucleo ed immagine di L_{A_s} al variare di s.

(4) Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$, la retta r di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

ed s_c dipendente da un parametro $c \in \mathbb{R}$, di equazione parametrica:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ c \\ 1-c \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} c \\ -2 \\ c \end{vmatrix}, \text{ per } t \in \mathbb{R}$$

  (a) (2pt) Trovare una forma parametrica per r ed equazioni cartesiane per s_c al variare di $c \in \mathbb{R}$.
  (b) (2pt) Determinare la posizione reciproca tra la retta r e la retta s_c al variare di $c \in \mathbb{R}$.
  (c) (1pt) Determinare per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ le rette r ed s_c sono ortogonali.
  (d) (2pt) Sia $c = 1$. Determinare la distanza tra la retta r e la retta s_1.

(5) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $W = \operatorname{span}\left(\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \right)$.
Si consideri ia proiezione ortogonale p_W su W come un endomorfismo $p_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
  (a) (3pt) Determinare una base ortonormale di autovettori di p_W.

(b) (1pt) Determinare $p_W\left(\begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{vmatrix}\right)$.

(c) (2pt) Determinare tutti i vettori $y \in \mathbb{R}^3$ per i quali $y + p_W(y) = \begin{vmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{vmatrix}$ (suggerimento: si ricorda che $p_W \circ p_W = p_W$).

(6) Sia dato il numero complesso $x = \frac{4i}{-1+i} - i\overline{(2-6i)} - \frac{(2+i)(6+2i)}{1+2i}$.

(a) (2pt) Si determinino modulo ed argomento di x.

(b) (2pt) Si determinino le radici cubiche di x.

Regole d'esame

- Non si può sostenere la prova se si ha già superato l'esame e non si è provveduto a rifiutare il voto precedente.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON à consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito avere con se' libri, appunti, telefoni, tablet etc di alcun tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.

Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Ingegneria Meccanica Matricole PARI

19 settembre 2018

TEMA D

(1) Determinare quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere. Se sono sempre vere fornire una dimostrazione, se non sono sempre vere, fornire un controesempio.
   (a) (1pt) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un endomorfismo con $f \circ f = 3I$, allora f è iniettivo.
   (b) (2pt) Se $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha un autovalore reale, allora ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$.

(2) Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale. Si dica se le seguenti affermazioni sono sempre vere oppure no fornendo una dimostrazione nel caso in cui siano sempre vere ed un controesempio nel caso in cui non lo siano.
   (a) (1pt) Se V, W sono sottospazi tali che $W \cap V^\perp = \{0\}$ allora $W \subset V$.
   (b) (2pt) Sia W un sottospazio e $\mathcal{B}$ una sua base. Se $y \notin W^\perp$ allora esiste un vettore di $\mathcal{B}$ che non è ortogonale a y.

(3) Sia data, al variare del parametro reale t, la matrice

$$B_t = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & t^2-t \\ 0 & t+1 & 1-t & 0 \\ 0 & 1+t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

e sia $L_{B_t}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato.
   (a) (4pt) Si dica per quali valori di t la matrice B_t è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   (b) (2pt) Per $t = 0$ si trovino, se possibile, una matrice ortogonale P ed una diagonale D tali che $P^T B_0 P = D$.
   (c) (2pt) Si calcolino nucleo ed immagine di L_{B_t} al variare di t.

(4) Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$, la retta r di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

ed s dipendente da un parametro $d \in \mathbb{R}$, di equazione parametrica:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -d \\ 1-d \\ 0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 2 \\ d \\ -d \end{vmatrix}, \text{ per } t \in \mathbb{R}$$

   (a) (2pt) Trovare una forma parametrica per r ed equazioni cartesiane per s_d al variare di $d \in \mathbb{R}$.
   (b) (2pt) Determinare la posizione reciproca tra la retta r e la retta s_d al variare di $d \in \mathbb{R}$.
   (c) (1pt) Determinare per quali valori del parametro $d \in \mathbb{R}$ le rette r ed s_d sono ortogonali.
   (d) (2pt) Sia $d = 1$. Determinare la distanza tra la retta r e la retta s_1.

(5) In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio $V = \text{span}\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix} \right)$.
Si consideri ia proiezione ortogonale p_V su V come un endomorfismo $p_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   (a) (3pt) Determinare una base ortonormale di autovettori di p_V.

(b) (1pt) Determinare $p_V\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix}\right)$.

(c) (2pt) Determinare tutti i vettori $z \in \mathbb{R}^3$ per i quali $z + p_V(z) = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{vmatrix}$ (suggerimento: si ricorda che $p_V \circ p_V = p_V$).

(6) Sia dato il numero complesso $y = \frac{4}{1-i} + i(\overline{6+2i}) + \frac{(1-2i)(6+2i)}{1+2i}$.
   (a) (2pt) Si determinino modulo ed argomento di y.
   (b) (2pt) Si determinino le radici cubiche di y.

Regole d'esame

- Non si può sostenere la prova se si ha già superato l'esame e non si è provveduto a rifiutare il voto precedente.
- Alla prova possono prendere parte solo gli studenti iscritti ad ingegneria Meccanica con matricola pari, o coloro che sono stati preventivamente autorizzati dal docente o dal Presidente di Corsi di Studi.
- Ciascun candidato dovrà aver cura di scrivere il proprio nome e cognome in stampatello su tutti i fogli (foglio bianco, tutti i fogli di brutta copia, testo d'esame).
- Al termine della prova i candidati consegneranno solo **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON à consentito consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova: in tal caso il candidato dovrà scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito avere con se' libri, appunti, telefoni, tablet etc di alcun tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova.